

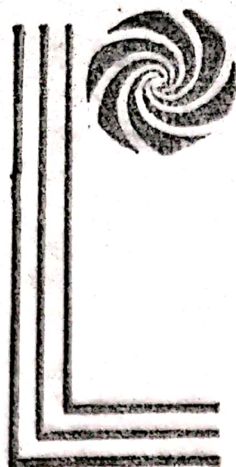
SINTEZE LYCEUM

ION PETRICĂ
ION LAZĂR

TESTE DE MATEMATICĂ PENTRU TREAPTA I ȘI A II-A DE LICEU

EDITURA ALBATROS





SINTEZE LYCEUM

Lect. univ. dr. I. PETRICĂ; I. LAZĂR prof.

TESTE DE MATEMATICĂ PENTRU TREAPTA I ȘI A II-A DE LICEU



EDITURA ALBATROS București • 1981

DIN PARTEA AUTORILOR

Prezenta lucrare cuprinde teste de algebră, analiză matematică și trigonometrie pentru elevii din treapta I și a II-a de liceu, adresîndu-se, de asemenea, și candidaților la concursul de admitere în facultățile tehnice și economice.

La alcătuirea testelor s-a avut în vedere respectarea programei actuale de matematică a cursului liceal, atît în ceea ce privește conținutul cît și ordinea prezentării materialului.

Terminologia, precum și majoritatea notațiilor utilizate sînt cele din manualele în vigoare.

20 august 1979
Domnești-Argeș

I. TESTE DE ALGEBRĂ

— CLASA A IX-a —

I.1. ECUAŢII ŞI INECUAŢII DE GRADUL I

TESTUL 1

1. Să se rezolve şi să se discute după valorile parametrului real m următoarele ecuaţii:

a) $(m+2)x-4=0.$

b) $m(x-1)=m.$

c) $3x+m^2=mx+9.$

d) $(m^2-3m+2)x=m-1.$

e) $\dfrac{m+1}{2x+1}=\dfrac{3+2x}{4x^2-1}.$

2. Să se determine valorile reale ale lui x, pentru care au sens expresiile de mai jos:

a) $\sqrt{5-6x}+\sqrt{x+1}.$

b) $\sqrt{\dfrac{1-2x}{3x+4}}-\sqrt{x^2-2x+1}.$

c) $\sqrt{\dfrac{2x+6}{1-3x}}+\sqrt{\dfrac{1-3x}{2x+6}}.$

3. Să se rezolve inecuaţia:

$$\left(\frac{x-2}{3}-\frac{1-x}{2}\right):\left(\frac{x-3}{2}-\frac{5-x}{3}\right)>1.$$

TESTUL 2

1. Să se rezolve ecuația:

$$\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x+a}{2x+3a}\right)^2 + 9x^2 + 6x + 1 = 0;\ a \in R.$$

2. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $|x| + |x-1| + |x-2| + 5x = 1.$

b) $2|x+2| + |x-2| - 3|x+1| + 3x - 2 = 0.$

c) $|x-1| = 1 - x.$

d) $\left|\frac{x^2-1}{x+1}\right| = 1 - x.$

3. Să se rezolve inecuațiile:

a) $x + |x-1| < 1.$

b) $|x-3| \leqslant 1.$

c) $|x+3| - |x+1| - 2 < 0.$

1.2. ECUAȚIA DE GRADUL AL DOILEA

TESTUL 3

1. Să se rezolve ecuația $ax^2 + bx + c = 0$; $a \in R \setminus \{0\}$, $b \in R$, $c \in R$ atunci cînd:

α) $a + b + c = 0.$

β) $a - b + c = 0.$

2. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $(m - 2n + p)x^2 + (m + n - 2p)x - 2m + n + p = 0.$

b) $m(n-p)x^2 + n(m-p)x + p(m-n) = 0.$

c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

d) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5) = 44.$

e) $(x^4 - 2x^2 + 7)(x^2 - 2x + 5) = 24.$

3. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuația de gradul al doilea în y ale cărei rădăcini sînt:

a) $y_1 = 3x_1$ și $y_2 = 3x_2$.

b) $y_1 = x_1^2$ și $y_2 = x_2^2$.

c) $y_1 = x_1 + 3$ și $y_2 = x_2 + 3$.

d) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$ și $y_2 = \frac{x_2}{x_1}$.

e) $y_1 = \frac{x_1}{x_2^2}$ și $y_2 = \frac{x_2}{x_1^2}$.

TESTUL 4

Fie ecuația (1) $mx^2 + (3m - 1)x + 2m - 1 = 0$; $m \in R \setminus \{0\}$.

A. Să se determine valorile parametrului real m astfel ca rădăcinile ecuației (1) să fie:

a) reale și egale;
b) reale și diferite;
c) pozitive;
d) negative;
e) opuse una alteia;
f) inverse una alteia.

B. Fără a rezolva ecuația (1) să se exprime în funcție de m următoarele expresii:

a) $E_1(m) = x_1^2 - x_2^2$;

b) $E_2(m) = \frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

C. Să se găsească o relație independentă de m între rădăcinile ecuației (1).

D. Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației (1).

E. Să se determine valorile lui m, astfel ca ecuația (1) să admită rădăcina $x_1 = 1$ și să se precizeze cea de a doua rădăcină.

1.3. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. MULŢIMI, FUNCŢII

TESTUL 5

1. Să se arate că formulele de mai jos au valoarea de adevăr „1" indiferent de propoziţiile simple ce le compun (identic adevărate):

a) $p \vee (\neg p)$ (principiul terţului exclus).

b) $(p \to q) \to (p \to p)$.

c) $p \wedge q \to q \wedge p$.

2. Să se arate că propoziţiile compuse (formulele) de mai jos au valoarea de adevăr „0" indiferent de propoziţiile simple ce le compun (identic false):

a) $p \wedge (\neg p)$ (legea contradicţiei)

b) $p \wedge \neg(p \vee q)$.

c) $\neg[p \vee (\neg p)]$.

3. Fie propoziţiile simple p, q şi tabelul:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1								
1	0								
0	1								
0	0								

Se cere:

a) Să se completeze tabelul.

b) Precizaţi care din formulele tabelului de mai sus sînt echivalente.

TESTUL 6

1. Să se demonstreze că formula:
$[(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r)] \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow r)$ are valoarea de adevăr „1" (este identic adevărată).

2. Fie predicatul $p(x, y)$: „x este divizibil cu y", unde x și y desemnează numere naturale.

a) Să se determine valorile de adevăr pentru propozițiile:

$$p(36, 2);\ p(2, 36);\ p(7, 3);\ p(3, 1);\ p(10, 5).$$

b) Dacă se notează cu q predicatul unar $p(x, 10)$ și cu r predicatul unar $p(x, 5)$, se cere să se precizeze valorile de adevăr ale propozițiilor:

α) $q \to r$ (propoziție directă). β) $r \to q$ (propoziție reciprocă). γ) $\neg q \to \neg r$ (propoziție contrară). δ) $\neg r \to \neg q$ (propoziție contrapusă).

3. Fie predicatul $p(x)$: „$|x| > 0$", unde x semnifică un număr real. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(\exists x) \neg p(x)$. b) $(\forall x)\ p(x)$. c) $(\forall x) \neg p(x)$.

d) $\neg[(\exists x) \neg p(x)]$. e) $\neg[(\forall x) \neg p(x)]$. f) $\neg[(\forall x)\ p(x)]$.

TESTUL 7

1. Fie predicatele:

a) $p(x)$: „$x^2 + 4 < 0$". b) $q(x)$: "$-x^2 - 9 < 0$".

c) $p(x, y)$: "$x + y = 3$". d) $q(x, y)$: "$xy = 0$",

unde x și y semnifică numere reale.

I. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

α/$(\exists x)p(x)$; β/$(\forall x)q(x)$; γ/$(\exists x)\ (\exists y)p(x, y)$;

δ/$(\exists x)\ (\forall y)p(x, y)$; η/$(\forall x)\ (\exists y)q(x, y)$; θ/$(\forall x)\ (\forall y)q(x, y)$.

II. Să se scrie negațiile propozițiilor de mai sus.

2. Fie propozițiile:

p: „Orice număr natural care are cifra unităților 4 este divizibil cu 4".

q: „Orice număr prim este impar".
r: „Orice triunghi cu două unghiuri congruente sau cu două laturi congruente este isoscel".
s: „Orice ecuație de gradul al doilea care are discriminantul pozitiv și produsul rădăcinilor pozitiv, are rădăcinile pozitive".

Să se formuleze propozițiile $\neg p$, $\neg q$, $\neg r$, $\neg s$ și să se precizeze valorile de adevăr ale propozițiilor p, q, r, s și $\neg p$, $\neg q$, $\neg r$, $\neg s$.

3. Să se scrie negațiile propozițiilor de mai jos precizîndu-se pentru fiecare și valoarea de adevăr.

p: „Există un triunghi dreptunghic cu unghiurile ascuțite congruente".
q: „Există două numere prime consecutive".
r: „Există un număr natural negativ".
t: „Există două unghiuri opuse la vîrf care nu sînt congruente".

4. Să se scrie negațiile predicatelor de mai jos:

$p(x, y)$: „$x = -1$ sau $y = 3$".

$q(x, y)$: "$x < 2$ și $y \neq 3$".

$r(x, y)$: „$x = 2$ sau $y \geqslant 5$".

$s(x)$: „$x^2 - 5x + 4 = 0$".

$t(x)$: „$x - \frac{1}{2} < 5$", unde $x \in R$, $y \in R$.

5. Să se precizeze valoarea de adevăr a formulei:

$$(\exists x)\ (\exists y)\ [(x = 0) \wedge (y \neq 0) \rightarrow (xy \neq 0)],$$

unde x și y desemnează două numere reale.

TESTUL 8

1. Să se verifice egalitățile:

a) $\{x \in R / x + |x - 1| = 4\} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

b) $\{x \in Z / 3|x| + 1 = 5x - 2\} = \emptyset$.

c) $\{x \in N / x^2 - 3x - 4 = 0\} = \{4\}$.

2. Fie mulțimea $M = \{-2, -1, 1\}$. Se cere să se determine mulțimile:

a) $M_1 = \left\{x \in M / \frac{x-1}{2x+5} < 0 \wedge \frac{3x+2}{x-1} < \frac{3}{2}\right\}$.

b) $M_2 = \left\{x \in M / \frac{3+x}{2} - 2 < \frac{1}{2} \vee 1 - x < 3\right\}$.

3. Să se precizeze valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos:

a) $\emptyset = \{0\}$. b) $\emptyset \in \emptyset$. c) $\emptyset \subset \emptyset$. d) $1 = \{1\}$.

e) $1 \neq \{1\}$. f) $1 \in \{1\}$. g) $0 \subset \{0\}$. h) $1 \subseteq \{1\}$.

4. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in Z / x$ este divizor al numărului $12\}$.

$B = \{x \in N / x$ este multiplu de 2 mai mic decît $12\}$.

$D = \{x \in Z / -3 \leqslant x \leqslant 4\} \setminus \{0\}$. Se cere:

a) Să se scrie elementele fiecărei mulțimi.

b) Să se precizeze care din următoarele propoziții sînt adevărate:

α) $B = D$. β) $D \subset A$. γ) $B \cup D = A$. δ) $A \cap B =$
$= \{2, 4, 6\}$. γ) $A \cap D = D$. σ) $A \cup D = D$.

5. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 6\}$, $C = \{3, 4, 6\}$, $D = \{1, 5\}$.

Să se precizeze valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $A \cup B \cup C \cup D = A$.

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) $A \cap B = D \cup C$.

d) $B - C = \{1\}$.

e) $C - B = \{, 3, 4\}$.

f) $B \Delta C = \{1, 3, 4\}$.

g) $C \cup (B \cap D) = \{1, 3, 4, 6\}$.

TESTUL 9

1. Fie mulțimile: $M_1 = \{x \in R / -1 \leq x < 3\}$; $M_2 = \{x \in R / x > 2\}$; $M_3 = \{x \in R / x \leq 1\}$.

Să se determine:

a) $M_1 \cap M_2$. b) $M_1 \cup M_2$. c) $M_1 \cap M_2 \cap M_3$.

d) $M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

2. Fie mulțimea $M = \left\{x \in Q / x = \frac{n+3}{n+1}, n \in Z \setminus \{-1\}\right\}$.

Să se determine submulțimile:

a) $M_1 = \{x \in M / x$ număr întreg$\}$.
b) $M_2 = \{x \in M / x$ număr natural$\}$.

3. Fie mulțimile: $A = \{0, 1\}$ și $B = \{a, b\}$.
a) Să se determine mulțimea $M = (A \cup B) \setminus \{0\}$.
b) Să se scrie toate submulțimile lui M.
c) Să se determine mulțimile:

α) $A \times B$; β) $B \times A$; γ) $A \times A$; δ) $B \times B$.

4. Să se determine mulțimile A, B știind că satisfac simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$.

c) $\{6\} \not\subset A - B$.

d) $\{5\} \not\subset B - A$.

5. Fie mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și submulțimile ei $A = \{1, 2, 3, 5\}$; $B = \{1, 2, 5\}$. Să se determine mulțimile:

a) $\complement_E A$. b) $\complement_E B$. c) $\complement_A B$. d) $\complement_E(\complement_E A)$.

e) $\complement_E(\complement_E B)$. f) $\complement_E(\complement_A B)$.

TESTUL 10

1. Să se scrie negația propozițiilor:

p_1: „$x \in A \cup B$", p_2: "$x \in A \cap B$", p_3: "$x \in A \setminus B$";

p_4: "$A \subset B$". p_5: "$(x, y) = (x', y')$", p_6: "$(x, y) \in A \times B$".

2. Să se determine mulțimile A, B, C care satisfac simultan condițiile:

a) $A \Delta B = \{1, 2, 6, 8, 9\}$.

b) $A \cap C = \{4\}$.

c) $B \Delta C = \{2, 6, 8\}$.

d) $\{1, 9\} \not\subset B$.

3. Dacă A, B și C sînt trei mulțimi oarecare să se demonstreze că:

$$A \setminus (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$

4. Fie mulțimile:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$D = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Folosind simbolurile "C" (complementară) "—" (diferență), exprimați cu ajutorul lui A, B și D următoarele mulțimi:

$M_1 = \{7, 8, 9, 10\}$. $\quad M_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$M_2 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $\quad M_5 = \{1, 2, 3, 4\}$.

$M_3 = \{5, 6\}$.

TESTUL 11

1. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$.

a) Folosindu-se diagrama asociată unei funcții, să se determine numărul tuturor funcțiilor definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

b) Să se asocieze fiecărei diagrame de la punctul precedent tabelul de valori corespunzător.

2. Fie intervalele $I_1 = (0, +\infty)$, $I_2 = (+1, +\infty)$ și relația $y - 2x = 1$.

Să se asocieze relației date funcția $f: I_1 \to I_2$ de argument x și funcția $g: I_2 \to I_1$ de argument y.

3. Să se asocieze expresiei algebrice $E(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, trei funcții distincte.

4. Fie expresiile algebrice: $E_1(x) = x^2$, $E_2(x) = -1+2x$, $E_3(x) = \frac{x}{1-5x}$, $E_4(x) = x^5 + 7x - 12$. Se cere să se asocieze acestor expresii două funcții distincte definite pe mulțimea numerelor reale.

5. Fie funcția $f : R \to R$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dacă } x \in (-\infty, -2) \\ \frac{2-x}{3+x} & \text{dacă } x \in [-2, 0] \\ -2 & \text{dacă } x \in (0, 3] \\ \frac{x^2}{x^3+1} & \text{dacă } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Să se determine: $f(0)$, $f(4)$, $f(-5)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(3)$.

6. Dacă funcția f: $[5, +\infty) \cup \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{-1, 0, 1, 5, 6, 8, 10\}$ este definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{dacă } x \in \{0,1\} \\ x + 3 & \text{dacă } x \in \{2, 3\} \\ -x + 4 & \text{dacă } x \in \{4\} \\ 8 & \text{dacă } x \in [5, 6] \\ 10 & \text{dacă } x \in (6, +\infty). \end{cases}$$

se cere să se determine: $f(5, 5)$, $f(3)$, $f(0)$, $f(183\,970)$, $f(2)$, $f(5{,}79853)$, $f(1)$, $f(4)$.

7. Să se completeze domeniul de definiție, respectiv codomeniul, pentru fiecare funcție de mai jos:

a) f: □ $\to R$ definită astfel: $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

b) f: □ $\to R$ definită astfel: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

c) f: $\{1, 2, 3\} \to$ □ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dacă } x \in \{1\} \\ 3x - 2 & \text{dacă } x \in \{2\} \\ 2x + 1 & \text{dacă } x \in \{4\} \end{cases}$$

d) f: $R \to$ □ definită prin: $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

TESTUL 12

1. Să se precizeze, care din perechile de funcții scrise mai jos sînt egale și să se argumenteze:

a) $\begin{cases} f_1: \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\} \text{ definită prin relația: } f_1(x) = x + 1 \\ g_1: \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\} \text{ astfel ca } g_1(-1) = 1; \ g_1(0) = 2; \ g_1(1) = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} f_2: \{0, 1\} \to \{0, 2\} \text{ definită prin relația } f_2(x) = 2x; \\ g_2: [0, 1] \to [0, 2] \text{ definită prin relația } g_2(x) = 2x. \end{cases}$

c) $\begin{cases} f_3: [1, 5] \to R \text{ definită astfel } f_3(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ dacă } x \in [1, 3]. \\ -x + 8 \text{ dacă } x \in (3, 5] \end{cases} \\ g_3: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ astfel ca: } g_3(1) = 1; \ g_3(2) = 3; \ g_3(3) = 5; \ g_3(4) = 4; \ g_3(5) = 2. \end{cases}$

2. Să se determine a, b, m și n astfel ca funcțiile $f: [a, b] \to R$ definită de relația $f(x) = mx + 1$ și $g: [0, 1] \to R$ definită astfel $g(x) = x + n$ să fie egale.

3. Fie funcția $f: R \to R$ definită astfel: $f(x) = ax + b$ (funcția de gradul I), $a \in R \setminus \{0\}$, $b \in R$. Să se arate că oricare ar fi numerele reale y și z are loc relația:

$$\frac{f(y) + f(z)}{2} = f\left(\frac{y + z}{2}\right).$$

4. În dreptul fiecărei funcții de mai jos sînt scrise coordonatele unor puncte. Se cere să se verifice dacă aceste puncte aparțin graficului funcției respective.

a) $f: R \setminus \{-1, 1\} \to R$; $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; $A_1(0, -1)$; $A_2\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$.

b) $g:R \to (0, +\infty)$; $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$; $B_1(-1, -2)$; $B_2\left(0, \frac{9}{4}\right)$.

c) $h:[0, 1] \to [-5, 1]$; $h(x) = 2x - 5$; $C_1\left(\frac{1}{2}, -3\right)$; $C_2(4, 3)$.

5. Pentru funcțiile care urmează, se cere să se determine punctele de intersecție ale graficelor respective cu axele de coordonate:

a) $f:R \to R$ definită astfel: $f(x) = 3x + 5$.

b) $g:R \to R$ definită astfel: $g(x) = x$.

c) $h:R \to R$ definită astfel: $h(x) = x^2 - 5x + 4$.

d) $F:R \to R$ definită astfel: $F(x) = |x - 2| + 3|2x - 1| + |x|$.

6. Fie funcțiile $f:R \to R$ definită prin relația $f(x) = x + 2$ și $g: R \setminus \{1\} \to R$ definită prin relația $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Se cere:

a) Să se scrie tabelele de valori ale funcțiilor f și g pentru $x \in \{-2, -1, 0, 2\}$

b) Ce restricție trebuie făcută funcției f pentru ca funcția g să fie egală cu restricția lui f.

TESTUL 13

Să se traseze graficele următoarelor funcții:

$f_1:[0, 3] \to [2, 5]$ definită prin $f_1(x) = x + 2$.

$f_2:\{0, 1, 2, 3\} \to \{-4, -3, 1, 4\}$ definită prin

$$f_2(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \in \{0, 3\} \\ -x - 2 & \text{dacă } x \in \{1\} \\ -5x + 6 & \text{dacă } x \in \{2\}. \end{cases}$$

$f_3:[-1,\ 3] \to [-5,\ 3)$ definită prin $f_3(x) = -2x + 1$.

$$f_4: R \to R \text{ definită prin } f_4(x) = \begin{cases} -x & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ x & \text{dacă } x \in [0,\ 2) \\ 2 & \text{dacă } x \in [2,\ 4) \\ -x + 8 & \text{dacă } x \in [4,\ 7) \\ 1 & \text{dacă } x \in [7,\ \infty). \end{cases}$$

$$f_5: R \to R \text{ definită prin } f_5(x) = \begin{cases} -3x + 6 & \text{dacă } x \in (-\infty;\ 2) \\ 5 & \text{dacă } x = 2 \\ x - 5 & \text{dacă } x \in (2,\ 6) \\ -1 & \text{dacă } x \in [6,\ 8) \\ -x + 9 & \text{dacă } x \in [8,\ \infty). \end{cases}$$

$f_6: R \to \{-1,\ 0,\ 1\}$ definită prin

$$f_6(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x \in (-\infty,\ 0) \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ 1 & \text{dacă } x \in (0,\ \infty). \end{cases}$$

(Funcția f_6, poartă numele de *funcția semn*, *signum* sau *signatură*).

$f_7: R \setminus \{0\} \to \{-1,\ 1\}$ definită prin $f_7(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

$$f_8: R \to Z;\ f_8(x) = \begin{cases} n & \text{dacă } x \in [n,\ n+1) \\ -n - 1 & \text{dacă } x \in [-n-1,\ -n). \end{cases}$$

(Funcția de mai sus se numește *funcția parte întreagă* și se notează $[x]$ sau $E(x)$).

$f_9 : R \to [0,\ 1)$ dată prin relația $f_9(x) = x - [x]$.

(Funcția de mai sus se numește *partea fracționară a lui* x și se notează $\{x\} = x - [x]$).

TESTUL 14

1. Să se traseze graficele funcțiilor de mai jos:

a) $f : R \to R_+;\ f(x) = x \cdot \operatorname{sign} x$.

b) $f(x) = |x| \cdot \max\limits_{x \in R}(1,\ x)$

2

c) $f(x) = \max_{x \in R}(x + 1,\ 2x - 3)$.

d) $f(x) = \min_{x \in R}(-2x + 3,\ -x + 5)$.

2. Să se precizeze care din relațiile de mai jos sînt echivalente.

a) $|x + y| \leqslant a$.

b) $x \geqslant a - y$ sau $x \leqslant -y - a$.

c) $-a - y \leqslant x \leqslant a - y$.

d) $|x + y| \geqslant a$.

3. Se consideră funcția $f : R \to R_+$ definită astfel: $f(x) = |3x - 2|$.

Se cere:

a) să se traseze graficul acestei funcții.

b) folosind graficul de la punctul precedent să se rezolve inecuația $f(x) \leqslant 3$.

4. Să se traseze graficele funcțiilor de mai jos:

a) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

b) $f(x) = x + |x|$.

c) $f(x) = |x| - x$.

TESTUL 15

1. Fie funcțiile:

a) $f : R \setminus \{-1\} \to R \setminus \{-1\};\ f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

b) $f : R \setminus \{2\} \to R;\ f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}$.

c) $f : R \to (-1, 1),\ f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

Să se studieze dacă sînt bijective și în caz afirmativ să se determine funcțiile inverse.

2. Fie funcția $f : R \setminus \{1\} \to R$.

a) Dacă $f\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \begin{cases} \frac{3+x}{x-1} & \text{pentru } x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \\ \frac{7-x}{x-1} & \text{pentru } x \in (1, 2] \end{cases}$

se cere să se găsească expresia lui $f(x)$.

b) Să se arate că funcția $g: R \to R$ definită astfel:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru } x \in R \setminus \{1\} \\ 1 & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

este inversabilă și să se determine inversa sa.

3. Fie funcțiile:

a) $f : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$; $f(x) = -x$.

b) $f : [0, 4] \to [0, 2]$; $f(x) = \min\limits_{x \in [0, 4]}(x, 4 - x)$.

c) $f : R \to R$; $f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in (0, \infty) \\ 2 - x & \text{dacă } x \in (-1, 0] \\ 3x - 2 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \end{cases}$.

d) $f : R \to R$; $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 3) \\ 2x - 5 & \text{dacă } x \in [3, \infty). \end{cases}$

Folosind graficele, să se studieze dacă funcțiile sînt bijective și în caz afirmativ să se reprezinte grafic în raport cu același sistem de axe și funcțiile inverse.

TESTUL 16

1. Fie funcțiile $f: R \to R$; $f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ 1 - x & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

și

$$g: R \to R; \quad g(x) = x^2.$$

Să se determine funcțiile compuse: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ și $g \circ g$.

2. Fie funcțiile:

$f: \{-2, -1, 3, 4\} \to R$; $f(x) = x^2 - 2x + 3$ și

$g: \{-3, 6, 11\} \to R$; $g(x) = x - 2$.

Pot fi definite funcțiile compuse $f \circ g$ și $g \circ f$?
În caz afirmativ să se determine aceste funcții și să se alcătuiască o diagramă a funcției compuse.

3. Fie funcțiile $f: R \to R$ și $g: R \to R$. Să se determine funcțiile compuse $f \circ g$ și $g \circ f$ în cazurile:

a) $f(x) = 2x - 3$ și $g(x) = x^2 - 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \\ x - 1 & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$ și

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ 3x & \text{dacă } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

4. Fie aplicația f prin care fiecărui cetățean român îi corespunde localitatea sa natală și aplicația g care face ca fiecărei localități să-i corespundă codul său poștal.

a) Este funcția f surjectivă?
b) Este funcția f injectivă?
c) Este funcția g bijectivă?
d) În ce constă aplicația $g \circ f$?

5. Fie funcțiile $f: A \to B$ și $g: B \to C$. Să se arate că:
a) dacă $g \circ f$ este injectivă atunci și f este injectivă.
b) dacă $g \circ f$ este surjectivă atunci și g este surjectivă.

I.4. NUMERE REALE

TESTUL 17

1. Să se arate că nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu: a) 3; b) 5; c) 6; d) $\frac{7}{9}$.

2. Se consideră propozițiile p: „$ad - bc = \pm 1$ și q: „fracția $\frac{ak + b}{ck + d}$ este ireductibilă“, unde a, b, c, d, k desemnează numere întregi. Să se arate că $p \to q$.

3. Să se arate că produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional este un număr irațional.

4. Să se completeze tabelul de mai jos trecînd „da“ atunci cînd numărul satisface condiția din coloana respectivă și „nu“ în caz contrar:

Numărul	Natural N	Întreg Z	Rațional Q	Irațional $R \setminus Q$	Real R
$\frac{1}{2}$	nu	nu	da	nu	da
$3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$					
$\sqrt{6,25}$					
$-1,7$					
$12,5(13)$					
$\sqrt{1,44} + \sqrt{\frac{3}{4}}$					
$1,1010010001\ldots$					
$4,12315607984\ldots$					
$a + b\sqrt{3}$, $a \in Q$, $b \in Q \setminus \{0\}$					
$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 3)$					

TESTUL 18

1. Dacă $q \in Q$ și $0 < q < 1$, să se arate că există $n \in N$ astfel încît are loc relația: $\frac{1}{n+1} < q < \frac{1}{n}$.

2. Să se arate că suma inverselor a trei numere naturale consecutive se transformă într-o fracție periodică mixtă.

3. Fie suma $\frac{n-1}{n} + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}$; $n \in N$. Să se specifice în ce caz această sumă este:

a) mai mare decît 2.
b) număr întreg.
c) fracție zecimală exactă.
d) fracție periodică mixtă.
e) fracție periodică simplă.

4. Să se arate că două fracții ireductibile cu termeni pozitivi întregi a căror sumă este egală cu unu au numitorii egali. Proprietatea se păstrează luînd în loc de unu $n \in N$.

5. Să se arate că rădăcina pătrată a unui număr irațional pozitiv, este un număr irațional.

1.5. FUNCȚIA DE GRADUL II. INECUAȚIA DE GRADUL II. SISTEME DE INECUAȚII DE GRADUL II. SISTEME DE ECUAȚII CU COEFICIENȚI REALI

TESTUL 19

Fie funcțiile de gradul doi:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$. b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

c) $f(x) = x^2 + 1$. d) $f(x) = -x^2 - 4$.

e) $f(x) = x^2 + x + 1$. f) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$.

g) $f(x) = x^2 - 5x + 6$. h) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

Pentru fiecare din aceste funcții se cere:

1. Să se scrie sub forma canonică.

2. Să se construiască graficul folosind metoda prin puncte și efectuînd una sau două translații.

3. Să se determine maximul sau minimul.

4. Să se stabilească punctele de intersecție cu axele de coordonate.

5. Să se determine intervalele de monotonie.

6. Să se stabilească semnul.

7. Să se facă tabloul de variație și apoi să se traseze graficul.

8. Să se compare graficele de la punctele 2 și 7.

9. Folosind graficul să se precizeze dacă funcția este bijectivă.

TESTUL 20

Fie familia funcțiilor de gradul doi $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$ unde $m \in R - \{0\}$. Graficele acestor funcții sînt după cum se știe parabole.

I. Se cere să se determine m astfel încît:

a) Vîrfurile parabolelor să fie puncte de minim.

b) Vîrfurile parabolelor să fie puncte de maxim.

c) Graficele parabolelor să nu intersecteze axa Ox.

d) Graficele parabolelor să fie tangente axei Ox.

e) Graficele parabolelor să intersecteze axa Ox în două puncte distincte.

f) Graficele parabolelor să se găsească deasupra axei Ox.

g) Graficele parabolelor să se găsească sub axa Ox.

h) Vîrfurile parabolelor să se găsească pe axa Oy.

II. Să se arate că există un punct fix prin care trec toate parabolele (indiferent de valorile lui m).

III. 1. Să se arate că vîrfurile parabolelor sînt situate pe o dreaptă a cărei ecuație se cere.

2. Să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor de mai jos justificînd de fiecare dată răspunsul.

p_1: „funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R\setminus\{0\}$, $b \in R$; $c \in R$, este injectivă".

p_2: „funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R\setminus\{0\}$, $b \in R$, $c \in R$, are valori pozitive pentru $(\forall)$ $x \in R$ dacă $a \in R_+$ și $\Delta \leqslant 0$".

p_3: „funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R\setminus\{0\}$, $b \in R$, $c \in R$, are valori negative pentru $(\forall) x \in R$, dacă $a \in R_-$ și $\Delta \leqslant 0$".

p_4: „funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R\setminus\{0\}$, $b \in R$, $c \in R$ are codomeniul $\left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ dacă $a \in R_-$".

p_5: „funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R\setminus\{0\}$, $b \in R$, $c \in R$ admite o restricție injectivă pentru $x \in \left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$".

p_6: „funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, a $\in R\setminus\{0\}$, $b \in R$, $c \in R$ este inversabilă pentru $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$".

p_7: „funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R\setminus\{0\}$, $b \in R$, $c \in R$, este inversabilă dacă $x \in \left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$".

p_8: „funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \in R\setminus\{0\}$, $b \in R$, $c \in R$, admite o infinitate de restricții inversabile".

TESTUL 21

1. Fie funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R \setminus \{0\}$, $b \in R$; $c \in R$. Să se determine coeficienții a, b, c în fiecare din cazurile:

α) punctul A (2, 3) să aparțină graficului funcției, iar minimumul să aibă abscisa zero și ordonata unu.

β) funcția să admită un minim egal cu 9 situat pe axa Oy, iar punctul B (1, 10) să aparțină graficului;

γ) graficul funcției să intersecteze axele de coordonate în punctele de abscisă 1 și 2, respectiv în punctul de ordonată -1.

δ) funcția să admită un maxim egal cu $-\dfrac{3}{4}$ în punctul de abscisă $\dfrac{1}{2}$, iar graficul său intersectează axa Oy în punctul de ordonată -1.

2. Să se reprezinte grafic funcția f: $\{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 5, 10\}$ unde $f(x) = x^2 + 1$.

3. Fie funcția $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Se cere să se determine o restricție bijectivă a acestei funcții și să se construiască graficul acestei restricții.

TESTUL 22

1. Să se rezolve inecuațiile:

a) $(4 - x^2)(x^3 - 10x^2 + 21x)(x^2 + x + 1) \leqslant 0.$

b) $(4 - x^2)(x^3 - 10x^2 + 21x)(x^2 + x + 1) > 0.$

c) $\dfrac{(3 - x)(-x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - 25)(-x^2 + 6x - 8)(x^2 + 3x + 7)} \leqslant 0.$

d) $\dfrac{(3 - x)(-x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - 25)(-x^2 + 6x - 8)(x^2 + 3x + 7)} > 0.$

e) $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x - 5}{x + 1} < (x + 1)^2 - x(x + 2).$

f) $[(x^2 - 5x + 4)^2 - (x^2 - 7x + 6)^2](3x^2 + 2) \geqslant 0.$

g) $\dfrac{-x^4 + 34x^2 - 225}{x^4 - 5x^2 + 4} < 0.$

2. Să se rezolve sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} -x^2+9<0 \\ x^2+5x \geqslant 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^4-3x^3+2x^2>0 \\ x^2+x-5>0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}>0 \\ (x^2-3x+2)(x+2)>0 \\ \dfrac{x(3x-2)}{(x-1)(x^2-4)} \geqslant 0. \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+5)(4x-x^2)>0 \\ \dfrac{x^4-17x^2+60}{x^3-8x^2+15x}>0 \\ 1>\dfrac{4-x}{x^2+x+1}. \end{cases}$

TESTUL 23

1. Să se traseze graficele următoarelor funcții:

a) $f(x)=|x^2-1|$.

b) $f(x)=|x^2-4|+|9-x^2|$.

c) $f(x)=|-x^2+3x-2|-|x^2-9|+3|x|$.

2. Folosind metoda grafică să se rezolve inecuațiile:

a) $|x^2-1| \leqslant 2$.

b) $|x^2-9|>2-|1-x^2|$.

3. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2-3x}\right|<\dfrac{1}{2}$.

b) $|x^2-1|>3-x^2$.

4. Să se determine valorile parametrului real m astfel ca $(\forall)x \in R$ să aibă loc relația:

$$\left|\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}\right|<3.$$

TESTUL 24

1. Fie funcția $f(x)=ax^2+bx+c$; $a \in R \setminus \{0\}$, $b \in R$, $c \in R$ cu proprietatea: $\Delta=b^2-4ac>0$. Se notează cu x_1 și $x_2 (x_1<x_2)$ intersecția graficului funcției $f(x)$ cu axa

Ox, iar α și β ($\alpha < \beta$) sînt două numere reale. Ce condiții se impun pentru ca să existe relațiile:

a) $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$. b) $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$.

c) $x_1 < \alpha < x_2$. d) $x_1 < x_2 < \alpha$.

e) $\alpha < x_1 < x_2$. f) $x_1 < \alpha$, $x_2 > \beta$.

g) $\alpha < x_1 < \beta < x_2$.

2. Fie familia funcțiilor de gradul doi $f_m : R \to R$, $m \in \in R \setminus \{1\}$, $f_m(x) = (m-1)x^2 - (m+1)x + (m+1)$.

Utilizînd rezultatele de la punctul precedent, se cere să se determine parametrul m (adică funcțiile din familie) pentru care:

p) $x_1 \in (0, 1)$ și $x_2 \in (0, 1)$.

q) $x_1 \in (-\infty, 0)$ și $x_2 \in (1, +\infty)$.

r) $x_1 \in (1, +\infty)$, $x_2 \in (1, +\infty)$.

s) $x_1 \in (-\infty, 2)$ și $x_2 \in (-\infty, 2)$.

t) $x_1 \in (0, 1)$ și $x_2 \in (1, +\infty)$.

(S-au notat cu x_1 și x_2 punctele de intersecție a graficelor cu axa Ox).

TESTUL 25

1. Să se determine valorile parametrului real m, astfel ca pentru $(\forall)$ $x \in R$ să avem:

a) $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 1 \geqslant 10$.

b) $m(x^2 + 4x + 5) - 2(x^2 + 3x + 3) \geqslant 0$.

c) $(2mx - 1)(x + 3m) \leqslant 0$.

2. Se dă funcția $f : R \to R$ dată de: $f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3$, $m \in R$.

a) Să se determine m astfel încît între rădăcinile ecuației

$$f(x) = 0 \text{ să existe relația: } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2.$$

b) Să se determine m astfel încît minimul funcției $f(x)$ să fie egal cu -3.

c) Pentru ce valori ale parametrului m, inecuația $f(x) > 0$ nu admite soluții?

d) Pentru $m = 1$ să se reprezinte grafic funcția:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{|x+1|} & \text{pentru } x < -1 \\ f(x) & \text{pentru } x \geq -1. \end{cases}$$

(Concurs de admitere în treapta a II-a, București, 1976).

3. Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R \setminus \{0\}$, $b \subset R$, $c \in R$. Se cere să se determine funcțiile care îndeplinesc condiția:

$$f(x+1) = f(-x), \ (\forall) x \in R.$$

(Olimpiadă, R.D.G., 1971).

4. Să se determine valorile parametrului real m astfel încît fracția:

$$E = \frac{x^2 - 2(m-1)x + m + 1}{mx^2 - mx + 1}:$$

a) să aibă sens pentru orice $x \in R$.
b) să fie negativă pentru orice $x \in R$.
c) să fie pozitivă pentru orice $x \in R$.

TESTUL 26

Să se rezolve în R sistemele de ecuații:

1. $\begin{cases} x + y = 10 \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{65}{2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 3x + y^2 - 4y = 0 \\ 2xy - 4x + 3y = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy = 28 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3xy = 11. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + xy + y = 3 \\ x - xy + y = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x^2 - xy + 3y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 5xy = -3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 10. \end{cases}$

(I.P., Galați, 1970)

8. $\begin{cases} x + y + z = ab \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{b}{a} \\ xyz = a^3. \end{cases}$

(A.S.E., București)

9. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15. \end{cases}$

(A.S.E., București)

10. $\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{d}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19(x + y) \\ x^3 - y^3 = 7(x - y). \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3 + y^3 - 2(x + y) = 20 \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

(I.P., București)

1.6. PUTERI ŞI RADICALI. ECUAŢII IRAŢIONALE

TESTUL 27

1. Fie funcția numerică $f : R \to R$, $f(x) = x^n$, $n \in N$; numită funcția putere de gradul n.

Să se stabilească valorile de adevăr ale proporzițiilor de mai jos, justificîndu-le.

p_1: „funcția $f : [-1, 3] \to [1, 9]$, $f(x) = x^2$ este o funcție pară".

p_2: „funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^5$ este strict crescătoare pe R".

p_3: „funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^4$ este strict crescătoare pe R".

p_4: „graficul unei funcții pare, are axa Oy, axă de simetrie".

p_5: „graficul unei funcții pare are pe Ox axă de simetrie".

p_6: „funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^4$ este injectivă".

p_7: „funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^3$ este injectivă".

p_8: „funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^4$ este surjectivă".

2. Să se traseze graficele funcțiilor:

a) $f : R \to R,\ f(x) = x^5$.

b) $f : R \to R,\ f(x) = 2x^3$.

c) $f : R \to R,\ f(x) = x^5 - 1$.

d) $f : R \to R,\ f(x) = (x - 1)^5$.

e) $f : R \to R,\ f(x) = |x^5|$.

f) $f : R \to R,\ f(x) = |(x - 1)^5|$.

g) $f : R \to R,\ f(x) = x^4$.

h) $f : R \to R,\ f(x) = (x - 1)^4$.

k) $f : R \setminus \{0\} \to R,\ f(x) = x^{-5}$.

l) $f : R \setminus \{0\} \to R,\ f(x) = x^{-5} + 1$.

m) $f : R \setminus \{0\} \to R,\ f(x) = x^{-1}$.

n) $f : R \setminus \{2\} \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$.

o) $f : R \setminus \{2\} \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$.

p) $f : R \setminus \{2\} \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{|x - 2|}$.

3. Să se efectueze:

a) $\left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}\right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)$.

b) $\left(a^2 - a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)$.

c) $\left(a^{\frac{7}{2}} + a^3 + a^{\frac{5}{2}} + a^2 + a^{\frac{3}{2}} + a + a^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)$.

TESTUL 28

1. Fie funcțiile:

$$f_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ f_1(x) = \sqrt[4]{x}.$$

$$f_2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ f_2(x) = \sqrt[5]{x}.$$

a) Sînt aceste funcții bijective? Dacă sînt, să se scrie funcțiile inverse.

b) Să se traseze graficele funcțiilor f_1 și f_2.

c) Să se obțină din graficele funcțiilor f_1 și f_2 graficele funcțiilor inverse.

2. Să se traseze graficele funcțiilor:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$. b) $f(x) = \sqrt{x^2} - x$.

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+1)^2}$.

d) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 3x + 2)^2}$.

3. Să se găsească valorile lui x pentru care radicalii de mai jos există în R.

a) $\sqrt{x^2 + 1}$. b) $\sqrt[3]{1 - x}$.

c) $\sqrt{-x^2 + 9}$. d) $\sqrt[3]{x - 1} - \sqrt[4]{1 - x}$.

e) $\sqrt[4]{-x^2 + 5x - 4}$. f) $\sqrt[5]{-x^2 - 1}$.

TESTUL 29

1. Să se simplifice expresiile:

a) $\sqrt[7]{3^8}$; $\sqrt[4]{(-2)^{32}}$; $\sqrt[14]{\frac{128}{2\,187}}$.

b) $\sqrt[12]{[(x-1)^3 (x+1)^2]^3}$; $\sqrt[15]{(x^2 - x - 1)^5}$.

c) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{9\sqrt[3]{27}}}$; $\sqrt[9]{2\sqrt[4]{128\sqrt[4]{16}}}$.

2. Să se calculeze:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} + \sqrt{192} - 8\sqrt{3}$.

b) $\sqrt[4]{81a^5b} - \sqrt[8]{256a^2b^{10}} - \sqrt{a^2b\sqrt{\frac{a}{b}}}$; $a \geq 0$, $b > 0$.

c) $\left[x\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{x}{y}}\right] \cdot \left[x\sqrt{\frac{y}{x}} - y\sqrt{\frac{x}{y}}\right]$; $x, y > 0$.

3. Folosind formulele radicalilor compuşi să se transforme expresiile:

a) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$. b) $\sqrt{28-5\sqrt{12}}$.

c) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$. d) $\sqrt{3-2a\sqrt{3-a^2}}$.

4. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$. b) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$. f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$.

TESTUL 30

1. Să se calculeze suma:

$$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

2. Să se simplifice expresiile:

a) $\dfrac{n^2+2n+2n\sqrt{p}+p+2\sqrt{p}}{n^2-n+n\sqrt{p}-\sqrt{p}}$.

b) $(x-\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}-y):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$.

c) $\left[\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]\cdot\left[\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\right.$
$\left.+\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right]$.

d) $\dfrac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}$.

e) $\dfrac{\sqrt{y^2+4xy+4x^3}-\sqrt{y^2-4xy+4x^2}}{\sqrt{x^2+4xy+4y^2}-\sqrt{x^2-4xy+4y^2}}$.

3. Să se determine $m \in R$ astfel încît expresia, $E = \frac{mx^2 - 7580}{\sqrt{8x^2 - (m-1)x + m - 7}}$ să fie definită pentru orice $x \in R$.

TESTUL 31

1. Să se calculeze:

a) $E(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ pentru $x = \frac{4a}{a^2+4}$, $x \in [-1, 1]$.

b) $E(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+x^2} + \sqrt[3]{1-x^2}}$ pentru

$$x = \sqrt{\frac{b(3a^2+b^2)}{a(a^2+3b^2)}}.$$

c) $E(x, y) = \sqrt{5x^2 - 6xy + 5y^2}$ pentru $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ şi $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

d) $E(x, y) = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{y+1}}$ pentru $x = \frac{2a^2-2a+3}{a^2+2}$ şi $y = \frac{-4a+2}{a^2+2}$.

2. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

b) $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$.

c) $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$.

d) $f : [2, +\infty) \to R$, $f(x) = \sqrt[4]{x-2}$.

TESTUL 32

Să se rezolve ecuațiile:

1. $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-3}=4.$

2. $x=1-\sqrt{25-x^2}.$

3. $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}.$

4. $\sqrt{x-a+1-2\sqrt{x-a}}+\sqrt{x-a+4+4\sqrt{x-a}}=3;$
$(x \geqslant a;\ a \in R).$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\ldots+$
$+\dfrac{1}{\sqrt{x+(n-1)}+\sqrt{x+n}}=\sqrt{n}\cdot(n \in N).$

6. $\sqrt{x^2+\sqrt{6x^2-9}}+\sqrt{x^2-\sqrt{6x^2-9}}=\sqrt{6}.$

7. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

8. $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=b.$

9. $\sqrt[3]{15+2x}-\sqrt[3]{13-3x}=4$

10. $\sqrt[3]{1-3x}+\sqrt{1+x}=0.$

11. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt[n]{x^2-1};\ n \in N.$

12. $\sqrt[3]{\sqrt{3x+1}+3x-2}+\sqrt[3]{\sqrt{3x+1}-3x-2}=$
$=\sqrt[3]{4(2-\sqrt{3x+1})}.$

13. $\dfrac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{\dfrac{a^2}{x^2}-1}=0;\quad a>0.$

(I.P., București)

TESTUL 33

1. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2 \\ x^2-4xy+6x=8. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1 \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78. \end{cases}$

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+7} - 2 < 0.$

b) $\sqrt{1-x^2} - 2x \geq 1.$

c) $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x-6} \geq 2.$

d) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}.$

I.7. NUMERE COMPLEXE

TESTUL 34

1. Să se găsească numerele reale x și y din ecuațiile:

a) $(x^2 - y^2)i + x^2 = 8(i+1) + y.$

b) $x^2 - 15 + iy^2 - 10i = -xy - ixy.$

c) $\dfrac{x+y}{x-y} + i(x^2+y^2) - \dfrac{5}{2} = \dfrac{y-x}{x+y} + 90i.$

2. Să se calculeze:

a) $(3+i)(2+i)$; $(-i+3)(2i-3)$; $(3-5i)(2i+3)$.

b) $\dfrac{1+i}{1-i}$; $\dfrac{3i}{1+i}$; $\dfrac{2i+3}{i-3}$; $\dfrac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}$.

c) $(1-i)^2$; $(1+i)^3$; $(1-3i)^2$; $(1+i\sqrt{3})^3$.

d) $3(i-3)^2 + \dfrac{12}{i-3} + \dfrac{i}{i-2} + \dfrac{i}{i-1} + i + \dfrac{i}{i+1} + \dfrac{2-i}{5}.$

3. Să se calculeze:

a) $i + i^2 + i^{59} + i^{270} + i^{100} + (-i)^{10} + (-i)^{23} + (-i)^{34} - i - (-i)^{43}.$

b) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} + i^{n+4}$; $n \in N$, $n \geq 4$.

c) $\dfrac{1}{i^{13}} - \dfrac{1}{i^{31}} + \dfrac{1}{i^{25}} - \dfrac{1}{i^{238}} + \dfrac{1}{i^{80}} - \dfrac{1}{i^{81}}.$

TESTUL 35

1. Să se găsească ecuațiile de gradul al doilea cu coeficienți reali, astfel încît una din rădăcini să fie:

a) $(1-i)(1+2i)$. b) $2+i\sqrt{3}$.

c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. d) $(1+i)^3$.

2. Să se rezolve ecuațiile de gradul al doilea:

a) $x^2+x+1=0$. b) $x^2-x+3=0$.

c) $x^2+2x+2=0$. d) $x^2+14x+74=0$.

3. Fie ecuațiile:

a) $x^3=8$. b) $x^3=-8$.

c) $3x^4=-5$. d) $x^4=2$.

Se cere:

I. Să se rezolve.

II. Pentru fiecare ecuație să se găsească suma rădăcinilor.

III. Pentru fiecare ecuație să se găsească produsul rădăcinilor.

4. Să se interpreteze geometric formulele:

a) $(1+2i)+(1-2i)=2$.

b) $(2-5i)+(-6+5i)=-4$.

TESTUL 36

1. Fie expresia $E(z)=\frac{i^5z^2-a+i^3(b+1)+2i}{2z-i}$. Să se calculeze valoarea acestei expresii pentru $z=a+bi$, $a\in R$, $b\in R$ și să se scrie rezultatul sub forma:

$$E(a+bi)=P(a,b)+iQ(a,b)$$

2. Fie numărul complex $z=a+bi$. Notîndu-se cu $\bar{z}$ conjugatul său, se cere să se determine z știind că:

a) $z^2=\bar{z}$ b) $\bar{z}=z^2-2z+2$

3. Să se calculeze valoarea expresiei: $E(z)=z^4-z^3+z^2+z+1$ pentru $z=2-i$.

4. Să se determine numerele complexe $z = a + bi$ astfel încît:

a) $z^2 = 1 + i$. b) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$.

c) $z^3 = 1 - i$. d) $z^3 = i$.

5. Să se rezolve ecuațiile:

a) $z^4 - 1 - i = 0$. b) $z^4 - 1 - i\sqrt{3} = 0$.

c) $z^6 + i - 1 = 0$. d) $z^6 - i = 0$.

6. Să se determine perechile (x, y) din plan pentru care:

a) $|\sqrt{x+y} + i\sqrt{x-2y}| = 1$.

b) $|\sqrt{3x-2y} - i\sqrt{x+3y}| = 5$.

c) $|\sqrt{x^2+3} + i\sqrt{y-1}| = 3$.

I.8. TESTE RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A IX-A

TESTUL 37

Fie ecuația: $(5m + 1)x^2 + (7m + 3)x + 3m = 0$, $m \in R$, ale cărei rădăcini sînt x_1 și x_2.

1. Se cere să se determine valorile parametrului m astfel încît:

a) Rădăcinile ecuației să fie reale.
b) Rădăcinile ecuației să nu fie reale.
c) Rădăcinile ecuației să aibă același semn.
d) Rădăcinile ecuației să aibă semne contrare.
e) Rădăcinile ecuației să fie negative.
f) Rădăcinile ecuației să fie pozitive.

2. Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației după valorile parametrului real m.

3. Să se determine o relație independentă de m, între rădăcinile ecuației.

4. Să se determine valorile parametrului m astfel încît:

a) o rădăcină să fie dublă celeilalte.

b) rădăcinile să fie inverse una alteia.

c) rădăcinile să fie egale în valoare absolută, dar de semne contrare.

5. Să se determine valorile parametrului m, astfel încît dacă $x_1 < x_2$ să aibă loc relațiile:

a) $1 < x_1 < x_2$. b) $x_1 < x_2 < 1$.

c) $x_1 < 2 < x_2$. d) $x_1 < 3 < x_2 < 4$.

e) $1 < x_1 < 3 < x_2$. f) $1 < x_1 < x_2 < 5$.

6. Fără a rezolva ecuația să se calculeze expresiile:

$$E_1(m) = x_1^2 + x_2^2,$$
$$E_2(m) = x_1^2 - x_2^2.$$
$$E_3(m) = x_1^3 + x_2^3.$$

TESTUL 38

Să se reprezinte grafic funcțiile:

1. $f : R \to R_+;\quad f(x) = \sqrt{(x^2-3)^2} + \sqrt{x^2-2x+1}$

2. $f : R \setminus \{0\} \to R;\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} + |x|$.

3. $f : R \to R;\quad f(x) = \max(x, x^2)$.

4. $f : R \to R;\quad f(x) = |x| \min(1, x)$.

5. $f : R \to R;\quad f(x) = |x| \max(1, x)$.

6. $f : R \to \{0, 1\}\quad \eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$

7. $f : R \to R;\quad f(x) = \text{sign}(x^2 - 3x + 2)$.

8. $f : R \to R;\quad f(x) = \text{sign}(-1 - x^2)$.

9. $f : R \to R;\quad f(x) = ||x+1| - 2|$.

10. $f : R \to R;\quad f(x) = \text{sign}(|x| - 1)$.

TESTUL 39

1. Fie funcțiile:

$$f : [2, 5] \to \left[\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right] : f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ și}$$

$$g : \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right] \to [2, 5];\ g(x) = \frac{x}{1-x}.$$

a. Se cere să se arate că aceste funcții sînt bijective.
b. Să se determine funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$.
c. Explicați rezultatul de la punctul anterior.

2. Fie funcția $f : R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to R \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}; f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; $a \in R$, $b \in R$, $c \in R \setminus \{0\}$ și $ad - bc \neq 0$. Să se arate că această funcție este bijectivă și să se determine inversa sa.

3. Fie funcția

$$f : R \to R;\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 \text{ dacă } x \in [2, +\infty) \\ 2x - 3 \text{ dacă } x \in (-\infty, 2) \end{cases}$$

Se cere:
a) să se arate că funcția f este bijectivă.
b) să se determine funcția inversă.
c) să se traseze graficul funcției $f(x)$.
d) din graficul de la punctul c) să se obțină graficul funcției inverse.

4. Fie funcția

$$f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} 2x + 3m \text{ dacă } x \in (-\infty, 2] \\ mx - 2 \text{ dacă } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Să se determine $m \in R \setminus \{0\}$ astfel încît funcția $f(x)$ să fie surjectivă.

5. Să se arate că funcția $f : R \to R;\ f(x) = x \cdot |x|$ este bijectivă și apoi să se determine inversa sa.

TESTUL 40

1. Fie funcțiile: $f : R \to R$, $f(x) = x$; $g : R \to R$, $g(x) = 2x + 1$, și $h : R \to R$; $h(x) = x^3$.
Se cere să se determine funcțiile compuse:

a) $f \circ g$.
b) $g \circ f$.
c) $h \circ f$.
d) $g \circ h$.
e) $h \circ (g \circ f)$.
f) $(h \circ g) \circ f$.

2. Fie funcția $f : R \setminus \{2\} \to R$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & \text{pentru } x \in (-\infty, 1). \\ \dfrac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{(x-2)^2}} & \text{pentru } x \in [1, 3] \setminus \{2\}. \\ x^2 - 6x + 8 & \text{pentru } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

a) Să se traseze graficul funcției de mai sus;
b) Este această funcție surjectivă?
c) Funcția f este inversabilă?

3. Să se arate că funcția $f : [0, 1] \to [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in Q \\ 1 - x & \text{dacă } x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

este bijectivă. Să se scrie inversa sa.

4. Cum se poate obține din graficul funcției:

$f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 1$, graficul funcției:

$g : R \to R_+$ $g(x) = |x^2 - 1|$?

În general cunoscîndu-se graficul unei funcții f, să se arate cum se construiesc graficele funcțiilor $|f|$, $-f$, $\eta(x) \cdot f$

5. Să se traseze graficul funcției

$$f : [-6, 6] \to R,\ f(x) = \max_{x \in [-6, 6]} [2, |x + 1|].$$

TESTUL 41

1. Se consideră funcția

$$f : R \to R;\ f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dacă } x < -1 \\ mx - 3 & \text{dacă } x \geqslant -1. \end{cases}$$

a) Pentru $m = -1$, să se arate că funcția este injectivă, nu este surjectivă.
darb) Pentru $m = -3$, să se arate că funcția este surjectivă, der nu este injectivă.
c) Să se determine valorile lui m pentru care funcția este bijectivă.

d) În condițiile punctului c) să se determine f^{-1} și să se reprezinte grafic.

2. Să se determine minimul funcției

$$f:\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right) \to R.\ f(x) = x - 1 - \sqrt{2x-1}.$$

(Concurs, 1965)

3. Să se discute și să se rezolve inecuațiile:

a) $\dfrac{x^2 - 2mx - 6}{2m+1} + 6 \geqslant 12\ m;\ m \in R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}.$

b) $\dfrac{m(x+1) - 2}{x+2} > 0,\ m \in R.$

TESTUL 42

1. Să se formalizeze în termeni logici propozițiile $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \urcorner P_1, \urcorner P_2, \urcorner P_3, \urcorner P_4, \urcorner P_5, \urcorner P_6$.

P_1. „Fiind date două puncte distincte A și B, există cel puțin un punct situat între A și B".

(proprietatea 7 — de ordonare).

P_2. „Există trei puncte care nu sînt situate pe o aceeași dreaptă."

(axioma 3 — de incidență).

P_3. „Fiind date un punct A și o dreaptă d care nu trece prin A, există o singură paralelă la dreapta d, care să treacă prin punctul A".

(postulatul lui Euclid).

P_4. „Dacă ABC este un triunghi, orice suplement al unghiului $\hat{B}$ este mai mare decît unghiul $\hat{A}$."

(teorema I a unghiului exterior).

P_5. „În orice triunghi ABC, suplementul unui unghi este congruent cu suma celorlalte două triunghiuri ale triunghiului."

(teorema a II-a a unghiului exterior).

P_6. „În orice triunghi, la latura mai mare se opune unghiul mai mare. (Deci dacă ABC este un triunghi, atunci avem

$|AB| < |BC|$ dacă și numai dacă $\hat{C} < \hat{A}$.)"

2. Fie predicatul binar $p(x, y)$: „$y = x^2 + 1$".

a) Să se formeze cu ajutorul cuantificatorilor $(\forall)$ și $(\exists)$ toate propozițiile posibile.

b) Să se scrie negațiile propozițiilor de la punctul precedent.

c) Să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor de la punctul a) în cazurile: $x \in N \wedge y \in N$; $x \in Z \wedge \wedge y \in Z$; $x \in Q \wedge y \in Q$; $x \in R \wedge y \in R$; $x \in C \wedge \wedge y \in C$.

3. Fie afirmațiile:

$p(x)$: „x este un element al mulțimii A unde $A = \Big\{x \in N /$ „x este divizor al numărului 27"$\wedge$„ $x = \dfrac{4n}{n+2}$, $n \in N\Big\}$".

$q(x)$: „x verifică inecuația $\dfrac{x}{2}(2x - 1) + 1 < 7 + \dfrac{x}{2}$".

$r(x)$: „oricare ar fi $a \in R$, $b \in R$ are loc relația:

$$a^2 + 4b^2 - 2a + 4b + x \geqslant 0"$$

a) Să se determine mulțimile de adevăr pentru fiecare predicat.

b) Să se determine $x \in R$ știind că o singură afirmație este falsă.

c) Să se determine $x \in R$ știind că o singură afirmație este adevărată.

TESTUL 43

1. Fie polinoamele: $f = x^5 - x^3 + 1{,}1x - 0{,}5$ și $g = x - 1{,}2$.

a) Să se calculeze cîtul și restul împărțirii lor.

b) Dacă R este restul obținut la punctul precedent se cere să i se asocieze aproximații zecimale cu erori mai mici de 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}.

2. Să se determine mulțimea de adevăr a propoziției deschise:

$$„\frac{|3x-1|}{1-3x}=1 \wedge x^2(x^2-1)+(m-x)^4=-\frac{1}{4};\ m \in R“.$$

3. Fie ecuația: $x^2+\alpha x+\beta=0$, unde α și β desemnează numere întregi. Se consideră următoarele afirmații:

p_1: „dacă ecuația admite o rădăcină rațională atunci acea rădăcină este întreagă“.

p_2: „dacă ecuația admite o rădăcină întreagă atunci această rădăcină divide pe β“.

p_3: „dacă ecuația admite o rădăcină întreagă atunci cealaltă rădăcină este, de asemenea, întreagă“.

a) Sînt echivalente din punct de vedere al valorii de adevăr propozițiile p_1, p_2, p_3?

b) Sînt adevărate aceste propoziții?

TESTUL 44

1. Fie inecuația: (1) $|x^2-3x+2|+m|x-3| \geqslant 4$.

a) Să se rezolve această inecuație pentru $m=2$.

b) Să se discute după valorile lui $m \in R$ și să se rezolve inecuația (1).

c) Să se determine m, astfel încît orice $x \in R_+$ să verifice inecuația.

2. Să se exprime cu ajutorul modulelor următoarele inegalități:

a) $y-5<x<y+5$.

b) $-2<x<6$.

c) $-1<x<11$.

d) $x \geqslant 5-y$ sau $x \leqslant -y-5$.

3. Să se determine mulțimile:

$M_1=\{(x, y) \in Z \times Z \mid |x|+|y|=12 \wedge x+y=2\}$.

$M_2=\{(x, y) \in Z \times Z \mid 2|x|+3|y|=13 \wedge |x+y|=5\}$.

$M_3=\{(x, y) \in N \times N \mid 2|x|+3|y|=13 \wedge |x+y|=5\}$

$M_4=\{(x, y) \in Z \times Z \mid (x^2-4x+19)(y^2+6y+17)=120\}$.

TESTUL 45

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 - 4x - 4\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 7 = 0$.

b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = a$; $a \in R$.

(I.P.B., 1976).

c) $\sqrt{x^2 + \sqrt{\sqrt{20x^2 - 5}}} + \sqrt{x^2 - \sqrt{\sqrt{20x^2 - 5}}} = \sqrt[4]{20}$.

d) $\sqrt{1 - x} - \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$.

e) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x^2} = \frac{1}{x - 2}$.

2. Fie propozițiile: p: „$x \in [1, 2]$", q: „$\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$".

Să se arate că $p \to q$.

(Concurs, 1965).

3. Se cer valorile întregi ale lui p și q astfel ca rădăcinile ecuațiilor $x^2 + px + q = 0$ și $x^2 + px - q = 0$ să fie în același timp raționale.

4. Care sînt valorile parametrului real m astfel ca fiecare din ecuațiile $f(x) = x^2 - (m^2 - 1)x + m^2 - 1 = 0$ și $g(x) = (m^2 - 3)x^2 6 - x - m^2 + 1 = 0$ să aibă o rădăcină și numai una, cuprinsă între rădăcinile celeilalte ecuații.

TESTUL 46

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$.

b) $(x^2 + 3x - 1)^4 - 13x^2(x^2 + 3x - 1)^2 + 36x^4 = 0$

c) $(2x^2 + 5x - 4)^2 - 5x^2(2x^2 + 5x - 4) + 6x^4 = 0$.

(A.S.E., București).

d) $(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 7)(x^2 - 2x + 11) = 30$.

e) $(x - \alpha)^3 + (x - \beta)^3 = (\alpha - \beta)^3$; $\alpha \in R$, $\beta \in R$.

2. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} \left[\dfrac{x+2}{3}\right] = \dfrac{y-3}{2} \\ \left[\dfrac{y+1}{3}\right] = \dfrac{x+3}{2} \end{cases}$

G.M.B., 1972)

b) $\begin{cases} \left[\dfrac{2x+1}{4}\right] = x-3 \\ \left[\dfrac{3x-1}{2}\right] = y+3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} [x]+[y]=4 \\ [xy]=3. \end{cases}$

(G.M.B.).

3. Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$3(x^2+y^2+z^2)-5(xy+xz-yz)+29x-33y-34z+103=0.$$

(G.M.B., 1968)

TESTUL 47

1. Să se formeze ecuația de gradul al doilea cunoscînd suma rădăcinilor $S=m+1$ și discriminantul $\Delta=(m-2)^2$.

2. Care sînt valorile lui x pentru care fracția:

$$\frac{x^2+|x|-2}{x^2-|x|-6} \text{ este supraunitară?}$$

(I.P. București, 1972)

3. Fie expresia:

$$E(x)=\frac{x-2\sqrt[3]{x^2}+2-\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{5}{3}}+1-x^{\frac{2}{3}}-x}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Să se arate că oricare ar fi $x \in R$, $E(x) > \dfrac{1}{1-x}$

4. Fie numerele:

$$a = 3\sqrt{2} + \sqrt{11}; \quad b = 7.$$

Să se precizeze valorile de adevăr ale propozițiilor:

$$p: „a > b"; \quad q: „a < b"; \quad r: „a = b".$$

5. Să se rezolve ecuația:

$2z - |z| + 8i = 1$, unde z este un număr complex.

TESTUL 48

1. Să se demonstreze că dacă coeficienții a, b, c ai ecuației, de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$, sînt numere întregi impare atunci rădăcinile nu pot fi numere raționale.

(Concurs pentru ocuparea catedrelor, 1971).

2. Să se arate că numărul $P(n) = 2^{4n+3} + 5 \cdot 3^n$ este divizibil cu 13 oricare ar fi $n \in N$.

3. Fie funcțiile:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 3] \\ 2x + 1 & \text{dacă } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ \beta x & \text{dacă } x \in (0, \infty) \end{cases} \text{ unde } \alpha, \beta \in R.$$

A. Să se stabilească mulțimea valorilor parametrilor reali α și β astfel încît:

a) Funcția g să nu fie nici surjectivă nici injectivă.
b) Funcția g să fie surjectivă și neinjectivă.
c) Funcția g să fie injectivă și nesurjectivă.
d) Funcția g să fie bijectivă.
e) În condițiile punctului d) să se determine inversa funcției g.

B. Pentru $\alpha = \beta = 1$ să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$.

4. Fie expresia: $E(m, x, y) = y(x + 2) - m(x + 1) + 2$.

A. Să se rezolve ecuația $E(m, x, y) = 0$, considerînd pe rînd una din variabile drept necunoscută, iar celelalte două variabile parametri reali.

B. Să se studieze semnul funcției $y(x)$, $x \in R \setminus \{-2\}$ și $m \in R$ obținută din $E(m, x, y) = 0$.

I.9. FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

TESTUL 49

Aplicînd proprietățile puterilor cu exponent real, să se aducă la forma cea mai simplă și să se compare numerele A și B.

1. $A = 2^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$; $B = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$.

2. $A = \frac{6^2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^{-2}}{3 : 2^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12}}$; $B = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}}$.

3. $A = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[5]{a}}$; $B = \left(\frac{a}{a^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-2}$, $(a > 0)$.

4. $A = \pi^{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}$; $B = \sqrt{\pi}\left(\frac{\pi^2}{\pi^{\frac{7}{2}}}\right)^{-1}$.

5. $A = (0,5)^{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$; $B = 4^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}}$.

6. $A = \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1+\sqrt{3}}$; $B = \left(2 + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{5}$.

7. $A = a^{(1-\sqrt{3})^2}$; $B = \left(\frac{a^2}{a^{\sqrt{3}}}\right)^2$, $(a > 0)$.

TESTUL 50

1. Fie funcția $f: R \to R_+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate?

a) Funcția exponențială este strict crescătoare pentru $a > 1$ și strict descrescătoare pentru $a \in (0, 1)$.

b) Graficul funcției exponențiale intersectează axa Oy în punctul de ordonată 1.

c) Funcția exponențială este surjectivă.

d) Funcția exponențială este bijectivă.

e) Inversa funcției exponențiale $f: R \to R_+$, $f(x) = a^x$ este funcția $f^{-1}: R_+ \to R$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ (numită funcția logaritmică).

2. Să se determine domeniul de definiție pentru:

a) $f(x) = (x + 1)^x$.
b) $f(x) = (1 - x^2)^{\sqrt{x}}$.
c) $f(x) = \log_2(x + 1)$.
d) $f(x) = \log_x(x^2 - 1)$.
e) $f(x) = \log_{x^2-1}(4 - x^2)$.
f) $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 1)$.

3. Să se traseze graficele funcțiilor:

a) $f(x) = 5^x$.
b) $f(x) = \frac{1}{5^x}$.
c) $f(x) = \log_5 x$.
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

TESTUL 51

1. Plecînd de la definiția logaritmului unui număr să se calculeze:

a) $\log_3 \frac{\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[3]{81}}$.
b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 16^{-1} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{8} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 32^{\frac{1}{2}}}$.

c) $\lg \frac{(0{,}01 \cdot 10^2)^{100}}{0{,}001}$.

d) $\log_a \frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$; $(a > 0,\ a \neq 1)$.

II. Folosind proprietățile logaritmilor să se calculeze:

a) $\log_2 35 - \log_2 \frac{20}{3} + \log_2 \frac{4}{21}$.

b) $\log_{0,5} 0{,}625 - \log_{0,5} \frac{175}{242} + \log_{0,5} \frac{30}{11} - \log_{0,5} \frac{132}{7}$.

c) $\lg 65 - \lg \frac{42}{3} + \lg \frac{22}{195} - \lg \frac{0{,}011}{21}$.

III. Știind că $\lg 2 = A$ și $\lg 3 = B$, să se exprime în funcție de A și B următorii logaritmi:

a) $\lg 2025$; b) $\log_{60} 24$; c) $\log_{54} 216$; d) $3^{\log_{27}(\lg 150)^2}$

TESTUL 52

I. Știind că $A = \log_{5x} \sqrt{x}$ și $B = \log_{5x^3} 125$; $(x > 0;\ x \neq 1)$ să se determine relația dintre A și B.

II. Să se verifice egalitatea:

$$\log_2 3 \cdot \log_5 7 \cdot \log_{11} 13 = \log_2 13 \cdot \log_5 3 \cdot \log_{11} 7.$$

III. Să se efectueze:

1) $5^{1+\log_5 7} - 2^{5+\log_8 27} + 3^{3+\log_9 4}$.

2) $\sqrt{A^{\frac{1}{\log_a A}} + B^{\frac{1}{\log_b B}} - 2\sqrt{ab}}$, $(0 < a < b,\ A > 0;\ B > 0$ și $a \neq 1,\ A \neq 1,\ B \neq 1)$.

3) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a + \log_a \log_b \sqrt[a]{b}$. $(a > 0;\ b > 0;\ a \neq 1;\ b \neq 1)$.

IV. Să se rezolve ecuația:

$$3\log_{1000}(x-1) + 2\log_{100}(x+3) - 2^{x+3}\log_{10}(x^2+2x-2) = 0.$$

(I.P. București, 1976)

TESTUL 53

1. Să se determine $m \in R$, astfel ca funcția $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}[4x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 4)$ să fie definită pe R.

2. Să se studieze semnul expresiilor:
a) $E_1(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$; b) $E_2(x) = \log_2(x^2 - 9)$.

3. Dacă $u_n = \lg \dfrac{(n+a)(n+b)}{(n+a+1)(n+b+1)}$ atunci suma
$S = \sum_{k=1}^{n} u_k + \lg(n+a+1)(n+b+1)$ este independentă de n.

4. Să se calculeze sumele:
a) $S = \sum_{k=2}^{n} \log_2\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$. b) $S = \sum_{k=1}^{n} \log_4 \dfrac{(k+1)(k+3)}{k(k+4)}$.
c) $S = \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{k^2 + 2k}{k^2 + 2k + 1}$.

5. Să se verifice egalitatea:
$$\left(\frac{bc}{a}\right)^{\lg bc \cdot \lg a} \cdot \left(\frac{ac}{b}\right)^{\lg ac \cdot \lg b} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^{\lg ab \cdot \lg c} = (10^{6 \lg a \lg b \lg c}),$$
unde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

TESTUL 54

Să se rezolve ecuațiile:

1. $[1,(3)]^x = \dfrac{0,1(6)}{0,2}$. **2.** $8^x \cdot 2^{6x} = 4^{2x+10} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{64^x}}{(2^x)^3}$.

3. $3 \cdot 2^x + 4^x = 28$.

4. $3^{x+2} \cdot 9^{x+1} = 81 \cdot \left(27^x + \dfrac{9}{3^x} - 1\right)$.

5. $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 364$.

6. $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$.

(A.S.E., București)

7. $3^{x+4} - 3^x = 5^{x+3} - 5^{x+2}$. **8.** $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

(A.S.E., București)

9. $3^x + 4^x = 5^x$. **10.** $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$.

TESTUL 55

Să se rezolve ecuațiile:

1. $\lg(x+1) - 2\lg(x-1) = \lg_2 8\sqrt[3]{64} - \lg_3 27\sqrt[3]{27}$.

2. $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\} = \log_4^2$.

3. $\lg x^{\lg x} = 10 + \lg\sqrt[3]{x}$.

4. $\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$.

(A.S.E., București)

5. $2^{lg_2 2x} - \lg(5^{2x}+4x-16) = \lg 4^x$.

6. $\log_5(5^x+1) - \log_5(1-5^{-2x}) - 2x + \log_5 24 = 0$.

7. $\lg 2 + \lg(4^{x-2}+9) = 1 + \lg(2^{x-2}+1)$.

(A.S.E., București).

TESTUL 56

1. Să se arate că $\log_a b = \log_{a^n} b^n$ și folosind această relație să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 2$.

b) $\lg_{x^2} 4 + \log_{\frac{1}{x}} 8 + \log_x \sqrt[3]{2} + \log_{\sqrt[3]{x}} 2 = \frac{1}{2}$.

2. Se consideră expresiile:

$E_1(x) = \lg(x^2 - 2x - 3)$ și $E_2(x) = \lg(x-3)$.

a) Să se afle x dacă $E_1(x) - E_2(x) = 2$.

b) Să se afle valorile lui x pentru care avem:

$$E_1(x) > E_2(x).$$

(I.P., București, 1974).

3. Fiind dată expresia $E(x) = \sqrt{\dfrac{\log_2^2 x - 1}{\log_2^2 x - 2\log_2 x}}$ se cere să se determine x pentru care $E(x) = 1$.

4. Să se scrie expresia: $E = \sqrt{\log_2 x(\log_x 2 + \log_2 x - 2)} + \sqrt{\log_2 x(\log_x 2 + \log_2 x + 2)}$ în funcție de $y = \log_2 x$ și apoi să se determine valorile lui x pentru care $E = 2$.

(I.P., București, 1976).

5. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a;$$

$$a > 0,\ a \neq 1.$$

TESTUL 57

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_x 2 = \dfrac{\log_{4x} 2}{\log_{2x} 2}$. b) $\log_5^2 x^3 - 63 \log_5 \sqrt{x} = 0$

c) $$\frac{1}{\log_6(3+x)} + \frac{2\log_{\frac{1}{4}}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1.$$

(A.S.E., București).

2. a) Să se arate că ecuația:

$\dfrac{\lg(x^2+m^2) - \lg m}{\lg 3x} = 1$, are rădăcini reale oricare ar fi parametrul real $m > 0$.

b) Să se determine m astfel încît ecuația de la punctul precedent să aibă o rădăcină și numai una în intervalul $(0,1)$.

c) Să se stabilească semnul expresiei:

$$E(x) = \frac{\log_3(x^2-8)}{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)}.$$

(Institutul Pedagogic, Suceava).

3. Să se rezolve inecuația:

$$\log_{x^2+\frac{1}{x^2}} \frac{x^2-3x+2}{x+1} > \log_{x^2+\frac{1}{x^2}} \frac{2x^2-3x-2}{x-1}.$$

TESTUL 58

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $4^x + 6^x = 9^x$.

b) $36 \cdot 9^{\frac{1}{x}+x} - 97 \cdot 6^{\frac{1}{x}+x} + 36 \cdot 4^{\frac{1}{x}+x} = 0.$

c) $\dfrac{1}{4^{\frac{1}{x}}} + \dfrac{1}{6^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{x}}}$.

2. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 648 \\ x + y = 7. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left(\dfrac{5}{2}\right)^{x-y} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{x-y} = 6{,}09 \\ xy - x + y = 118. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 3 \\ \lg x - \lg y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5^{\lg x} \cdot 3^{\lg y} = 3\sqrt[3]{45} \\ \lg x + \lg y = 2. \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 0{,}(4). \end{cases}$

TESTUL 59

I. Să se rezolve ecuațiile:

1) $x^{\log_{\sqrt[4]{x}}(x-1)} = 16$. 2) $a^{\log_a x} = x^{\log_x a}$, $(a, x > 0; a, x \neq 1)$.

3) $3^{\log_3(x^2-6x+9)} - 2^{\log_2(x-4)} = 5^{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120}$.

II. Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care are loc inegalitatea:

$$[\log_{\sqrt{2}}(3^x - 2)] \cdot \left[\log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{3^x - 2}\right] > 2.$$

III. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \lg \sqrt{x^n y^m} = mn + 1 \\ \dfrac{\lg x^{\lg y}}{\lg y^{\lg y}} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2, \end{cases} \quad (x, y > 0, x, y \neq 1).$$

I.10. COMBINATORICĂ ŞI INDUCŢIE MATEMATICĂ

TESTUL 60

I. La o cantină restaurant un meniu este format din trei feluri. Cîte posibilităţi în alegerea meniului are un cetăţean ştiind că zilnic se pregătesc pentru felul întîi trei sortimente, pentru felul doi patru sortimente, iar ca desert două sortimente?

II. Oraşul Roşiorii de Vede trebuie reprezentat la un concurs judeţean de un singur elev de liceu. Ştiind că elevul poate fi din orice an de studiu, fată sau băiat, de la unul din cele patru licee ale oraşului, se cere să se precizeze cîte decizii pot fi luate în alegerea liceanului.

III. În finala unei probe olimpice sînt calificaţi şase sportivi. Să se precizeze numărul de posibilităţi de cîştigare a celor trei medalii (aur, argint, bronz) ştiind că toţi sportivii au şanse egale şi că o medalie este atribuită unui singur sportiv.

IV. Un comitet internaţional este compus din 5 membri. Documentele cu care lucrează acest comitet sînt închise într-o casă de bani. Cîte broaşte trebuie să aibă această casă de bani şi cîte chei trebuie să aibă fiecare din membrii săi, pentru a nu avea acces la documente decît în cazul cînd trei membri din comitet sînt prezenţi?

(Matematica v şkole)

TESTUL 61

I. 1. Să se arate că $P_{n+1} = (n+1) \cdot P_n$

2. Să se simplifice expresiile:

a) $\dfrac{(n+1)! + n!}{n!}$. b) $\dfrac{(n+1)! - n!}{(n-1)!}$

c) $\dfrac{0!}{1!} + \dfrac{3!}{2!} + \dfrac{5!}{4!} + \ldots + \dfrac{(2n-1)!}{(2n-2)!}$.

d) $\dfrac{0!}{2!} + \dfrac{1!}{3!} + \dfrac{2!}{4!} + \ldots + \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$.

e) $\frac{2!}{0!} + \frac{3!}{1!} + \frac{4!}{2!} + \dots + \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

3. Să se arate că: $P_{n+1} = 1 + P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n$.

II. Să se arate că:

$$\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n} = \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$

III. Să se determine valorile lui x astfel încît:

a) $\frac{(x+1)!}{3!(x-1)!} = 5$.

b) $(x+2)! = -15(x-1)! + 5[x! + (x+1)!]$.

c) $\frac{x(x+1)!}{2 \cdot x!} \leqslant 2x + 9$. d) $x(x-3)! < 108 \cdot (x-4)!$.

IV. Să se arate că oricare ar fi $m, n \in N$, $m!n!$ divide pe $(m+n)!$

(G.M.B.)

TESTUL 62

I. Fie mulțimea $M = \{a, b, c, d, e\}$. Dacă se formează toate submulțimile ordonate ale lui M, avînd fiecare trei litere atunci:

1) Cîte submulțimi ordonate încep cu litera a.
2) Cîte submulțimi ordonate conțin litera a.
3) Cîte submulțimi ordonate încep cu literele a și b.
4) Cîte submulțimi ordonate conțin literele a și b.

II. Să se calculeze:

1) $\frac{8A_n^3 + 7A_n^4 + A_n^5}{A_{n+1}^4}$; 2) $\frac{n \cdot A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_n}$;

3) $\frac{A_{n-2}^{k-1} + 3A_{n-2}^{k} + A_{n-2}^{k+1}}{(n-k)^2}$.

III. Să se rezolve ecuațiile:

1) $\frac{A_{x+1}^8 + A_x^7}{A_{x-1}^6} = 99$; 2) $A_{x+1}^{n+1}(x-n)! = 90(x-1)!$.

IV. Să se calculeze suma:

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+$$

$$+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+3)!}.$$

(Matematika v şkole)

TESTUL 63

I. Să se deducă egalitatea:

1) $(n-k)C_n^{k+1}+(k+1)C_n^k=(n-2k-1)C_{n+1}^{k+1}$

II. Să se găsească valorile lui x, ce verifică relaţiile:

1) $C_x^5=C_x^3$; 2) $C_x^3=2C_x^{x-2}$; 3) $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3-C_x^{x-4}}=\dfrac{24}{23}$.

4) $C_x^{x-4}\leqslant C_x^{x-3}$; 5) $C_{2x}^{2x-8}\geqslant C_{2x}^{2x-12}$

6) $x\cdot C_{x-1}^{x-3}-7C_{x-2}^{x-3}\leqslant 8(x-2)$.

III. Să se rezolve ecuaţia:

$$C_{5x-x^2+5}^{x}=C_{11}^{3}.$$

TESTUL 64

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(2x+1)!}{(2x-1)!}+\frac{(2x+2)!}{(2x)!}=242;\quad x\in N.$$

2. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $A_x^6-24xC_x^4=11A_x^4$.

b) $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101$.

c) $\dfrac{1}{P_{x-1}}-\dfrac{1}{P_x}=\dfrac{(x-1)^3}{P_{x+1}}$.

d) $12C_{x-3}^{x+1}=55A_{x+1}^2$.

3. Să se demonstreze egalitățile:

a) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$; $k \in N$, $n \in N$, $n > k > 1$.

b) $$\frac{C_n^k}{C_n^k + C_n^{k+1}} + \frac{C_n^{k+5}}{C_n^{k+2} + C_n^{k+3}} = \frac{2C_n^{k+1}}{C_n^{k+1} + C_n^{k+2}};$$

$$n \in N, \ k \in N; \ n > k + 3.$$

TESTUL 65

1. Să se calculeze:

a) $\prod_{k=1}^{n} a^{\frac{k}{(k+1)!}}$. b) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)! + k!}$.

2. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} xA_{x-1}^{y-1} \cdot P_{x-y} = 15 P_{x-1} \\ 9C_{x+1}^{y} = 16C_x^{y+1}. \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_{2x}^{3y} - 8A_{2x}^{3y-1} = 0 \\ 9C_{2x}^{3y} - 8C_{2x}^{3y-1} = 0. \end{cases}$

(Concurs, 1969).

c) $\begin{cases} 7C_x^1 \, y^{x-1} \, z = A_8^4 \\ C_x^2 \, y^{x-2} \, z^2 = A_{10}^3 \\ 11 \, C_x^3 \, y^{x-3} \, z^3 = A_{13}^4 \end{cases}$

3. Să se calculeze suma: $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{n+k}{(n+k+1)!}$.

TESTUL 66

1. O urnă conține 8 bile albe și 5 bile negre. Se extrag la întîmplare 4 bile. Care este probabilitatea, ca din cele 4 bile extrase, două să fie albe și două să fie negre?

2. O urnă conține 10 bile albe și 5 bile negre. Se extrag la întîmplare 3 bile și se cere probabilitatea ca cele 3 bile extrase să aibă aceeași culoare.

3. În cîte moduri se pot schimba între ele literele cuvîntului „carte“?

4. Se permută cifrele 1, 2, 3, 4, 5 în toate modurile posibile. Să se găsească, în sistemul zecimal, suma numerelor formate prin aceste permutări.

5. Să se demonstreze egalitățile:

a) $$\frac{C_3^3 + C_4^3 + \ldots + C_n^3}{C_4^4 + C_5^4 + \ldots + C_n^4} = \frac{C_{n+1}^4}{C_{n+1}^5}.$$

b) $$\left[\frac{C_m^p}{C_m^{p-1}} - \frac{C_{m+k}^{p+k}}{C_{m+k-1}^{p+k-1}}\right]\left[\frac{C_n^p}{C_n^{p-1}} - \frac{C_{n+k}^{p+k}}{C_{n+k}^{p+k-1}}\right] = \frac{m-p+1}{n-p+1};$$

$$(x \geqslant p, \quad m \geqslant p).$$

TESTUL 67

Folosind metoda inducției matematice să se demonstreze:

1. $$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \leqslant \frac{2n-1}{n};$$

$$n \in N$$

2. $1!\,1 + 2!\,2 + 3! + \ldots + n!n = (n+1)! - 1.$

3. $$\frac{(k+1)!}{1!} + \frac{(k+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(k+n)!}{n!} =$$

$$= \frac{(k+1+n)!}{n!(k+1)} - k!$$

4. $$\frac{p}{1-p^2} + \frac{p^2}{1-p^4} + \frac{p^4}{1-p^8} + \ldots + \frac{p^{2^{n-1}}}{1-p^{2^n}} =$$

$$= \frac{1}{1-p} \cdot \frac{p-p^{2^n}}{1-p^{2^n}}; \quad (p \neq 1).$$

5. $$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

(G.M.B., 1968)

6. $$\frac{16}{9 \cdot 25} + \frac{24}{25 \cdot 49} + \frac{32}{49 \cdot 18} + \ldots + \frac{8(n+1)}{[(2n+1)(2n+3)]^2} =$$

$$= \frac{4n(n+3)}{9(2n+3)^2}.$$

(G.M.B., 1968)

7. $\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$.

(G.M.B., 1970)

8. $\frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{n!\,n^k}$; $(n, k \in N)$.

9. $7^{4n+1} - 7$ se divide la 210.

TESTUL 68

1. Se consideră dezvoltarea $(a+b)^n$.

a) Să se calculeze suma coeficienților binomiali.

b) Să se arate că: $1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$.

c) Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{1}{1!\,(n-1)!} + \frac{1}{3!\,(n-3)!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!\,1!} = \frac{2^{n-1}}{n!}.$$

2. Să se demonstreze egalitățile:

a) $$\frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n-1}}{1!\,(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{2!\,(n-2)!} + \dots + \frac{2^0}{n!} = \frac{3^n}{n!}.$$

b) $$\frac{2^n}{n!} - \frac{2^{n-1}}{1!\,(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{2!\,(n-2)!} - \frac{2^{n-3}}{3!\,(n-3)!} + \dots +$$

$$+ (-1)^k \cdot \frac{2^{n-k}}{k!\,(n-k)!} + \dots + (-1)^n \frac{2^0}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

3. Pentru $x = \frac{2^n + 2^{n-2} \cdot C_n^2 + 2^{n-4} \cdot C_n^4 + \dots}{2^{n-1} \cdot C_n^1 + 2^{n-3} \cdot C_n^3 + 2^{n-5} \cdot C_n^5 + \dots}$

să se calculeze valoarea expresiei:

$$E(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

4. Să se arate că:

a) $1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

b) $\sum_{x=0}^{n} \frac{1}{[x!]^2 [(n-x)!]^2} = \frac{(2n)!}{[n!]^4}$.

TESTUL 69

1. Să se arate că numărul $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ este număr întreg.

2. Să se determine suma pătratelor coeficienților binomului $(x + a)^n$.

3. Să se demonstreze egalitățile:

a) $C_n^0 \cdot C_n^p + C_n^1 \cdot C_n^{p+1} + C_n^{n-p} \cdot C_n^p = \frac{(2n)!}{(n-p)!\,(n+p)!}$;

$$p \leqslant n; \quad p \in Z, \quad n \in Z.$$

b) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - (C_n^3)^2 + \ldots + (-1)^n (C_n^n)^2 =$

$$= \begin{cases} 0 \text{ pentru } n \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} \text{ pentru } n \text{ par.} \end{cases}$$

4. Coeficientul penultimului termen din dezvoltarea binomului $\left(\frac{1}{ax^{-\frac{1}{3}}} - \frac{\sqrt[4]{x^{-1}}}{a^{-1}}\right)^n$ este egal cu 18. Se cere:

a) să se precizeze cîți termeni are această dezvoltare

b) să se calculeze termenul al nouălea al acestei dezvoltări.

c) să se scrie termenul care îl conține pe x la puterea -1.

TESTUL 70

1. Să se scrie termenul de rangul r din dezvoltarea binomului $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + x\right)^{48}$ știind că coeficientul termenului de rang r^2 este egal cu coeficientul termenului de rang $5r$.

2. Să se determine x, știind că al patrulea termen al dezvoltării:

$$\left(x^{\frac{1}{2(1 + \lg x)}} + x^{\frac{1}{12}}\right)^6 \text{ este egal cu } 200.$$

(Facultatea de Matematică, Cluj, 1970)

3. Să se determine n și x știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $\left(x^{\frac{1}{2}\log_a x} + \frac{1}{x}\right)^n$ este egală cu 128, iar al șaselea termen din dezvoltare este egal cu $\frac{21}{a^4}$.

4. Să se determine x știind că suma ultimilor trei coeficienți ai binomului $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ este egală cu 22 și că suma dintre termenii de rang 3 și rang 5 este 135.

(A.S.E., București).

TESTUL 71

1. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots a_n$ în progresie aritmetică, $a_1 > 0$.

a) Să se arate că $S_n = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} +$

$$+ \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

b) Dacă $S_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ și $S_q = a_1 + a_2 + \ldots a_q$, $p \in N$, $q \in N$, $p + q \leq n$, să se calculeze S_{p+q}.

c) Dacă $\frac{S_p}{S_q} = \frac{p^2}{q^2}$ să se arate că $\frac{a_p}{a_q} = \frac{2p-1}{2q-1}$.

d) Dacă $a_1 = 0$, se cere să se simplifice expresia:

$$S = \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-1}} - a_2\left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2}}\right).$$

2. Să se scrie progresia aritmetică cu un număr impar de termeni, știind că suma termenilor de rang par este 295, aceea a termenilor de rang impar este 354 și că produsul termenilor extremi este 981.

TESTUL 72

1. Să se găsească trei numere în progresie aritmetică de sumă 90 și în care raportul între primul și al treilea termen este $\frac{1}{11}$.

2. Fie numerele $a_1, a_2 \ldots a_n$. Să se arate că dacă $a_k + a_{k-2} = 2a_{k-1}$, $(\forall)$ $k = 2, 3 \ldots n$, atunci numerele $a_1, a_2 \ldots a_n$ formează o progresie aritmetică.

3. Fie ecuația $x^2 - px + q = 0$, ale cărei rădăcini sînt x_1 și x_2. Să se determine p și q astfel încît numerele x_1, x_2, p, q să fie în progresie aritmetică.

4. Suma a trei termeni în progresie geometrică este 52. Dacă scădem din cel de-al doilea termen 1, iar pe cel de-al treilea termen îl împărțim la 2 atunci se obține o progresie aritmetică. Să se determine progresia.

5. Pot fi laturile unui triunghi dreptunghic în progresie geometrică?

TESTUL 73

1. Dacă se notează cu q rația unei progresii geometrice $a_1, a_2 \ldots a_n$, se cere să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$.

b) $$\frac{1}{a_1^2 - a_2^2} + \frac{1}{a_2^2 - a_3^2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}^2 - a_n^2}.$$

c) $$\frac{1}{a_1^k + a_2^k} + \frac{1}{a_2^k + a_3^k} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}^k + a_n^k}.$$

2. Fie numerele $a_1, a_2, \dots a_n$ în progresie geometrică. Dacă se cunosc $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ și $S' = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ se cere să se calculeze produsul $P = a_1 \cdot a_2 \dots a_n$.

3. Dacă numerele $a_1, a_2 \dots a_n$ sînt în progresie geometrică, se cere să se calculeze suma:

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}.$$

I. 11. ELEMENTE DE CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

TESTUL 74

1. Într-o urnă se găsesc 20 de bile, dintre care 15 albe și 4 negre. Se extrag 2 bile. Se notează cu A evenimentul care constă în faptul că cel puțin una din bilele extrase să fie albă și cu B evenimentul ca ambele bile să fie albe. Să se precizeze, dacă evenimentele A și B sînt compatibile sau nu. Evenimentele A și B sînt evenimente elementare?

2. Să se scrie cîmpul de evenimente atașat experiențelor:
a) aruncarea unei monede;
b) aruncarea unui zar.

3. Într-o urnă se găsesc 15 bile, numerotate de la 1 la 15. Se extrage la întîmplare o bilă. Care este probabilitatea ca numărul înscris pe bilă să fie:
a) număr prim;
b) număr par;
c) număr divizibil cu 3;
d) număr divizibil cu 4;
e) număr divizibil cu 5.

4. Se aruncă două zaruri de 10 ori. Se cere probabilitatea ca dubla unu să apară cel puțin o dată.

5. Într-o urnă se găsesc 15 bile albe și 20 bile negre. Se extrage o bilă și fără a pune bila extrasă înapoi în urnă, se mai extrage încă o bilă.

Dacă prima bilă extrasă este albă, care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie neagră? Dar ca a doua bilă extrasă să fie tot albă?

TESTUL 75

1. O urnă conține 15 bile albe și 10 bile negre. Care este probabilitatea ca extrăgînd la întîmplare o bilă, aceasta să fie neagră?

2. Doi trăgători, trag simultan asupra unei ținte. Probabilitatea de a nimeri ținta este $p_1 = 0,7$ și $p_2 = 0,8$ pentru primul respectiv al doilea trăgător. Să se găsească probabilitatea ca primul trăgător să nimerească ținta, iar cel de-al doilea nu.

3. Într-o urnă sînt 30 de bile dintre care 8 albe, 12 negre și 10 roșii. Se extrag pe rînd 10 bile, punîndu-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Care este probabilitatea ca între cele 10 bile extrase să fie 4 albe, 2 negre și 4 roșii?

4. Fie trei urne U_1, U_2, U_3. Urna U_1, conține 7 bile albe și 3 bile negre, urna U_2 conține 3 bile albe și 8 bile negre, urna U_3 conține 4 bile albe și 5 bile negre. Care este probabilitatea ca extrăgînd la întîmplare cîte o bilă din fiecare urnă să se obțină o bilă albă și două bile negre?

5. Într-o clasă, sînt 30 de elevi dintre care 18 fete și 12 băieți. Practica productivă o fac în trei ateliere, cîte 10 în fiecare atelier. Împărțirea elevilor pe ateliere s-a făcut prin tragere la sorți. Care este probabilitatea ca în primul atelier să lucreze 9 băieți?

6. Într-o urnă sînt 40 de bile dintre care 10 bile albe, 10 negre, 10 roșii și 10 galbene. Se extrag deodată 2 bile. Care este probabilitatea ca printre bilele extrase să fie cel puțin o bilă albă?

TESTUL 76

1. Într-o urnă sînt 7 bile numerotate de la 1 la 7. Se extrag simultan trei bile. Să se determine probabilitățile următoarelor evenimente:

a) Cel puțin una dintre bile să poarte un număr par;
b) Cel mult una dintre bile să poarte un număr impar;
c) Cel puțin una dintre bile să poarte un număr multiplu de 3.

(Concurs elevi, 1973)

2. Să se determine probabilitatea ca dintr-o școală cu 1096 de elevi să existe cel puțin 4 elevi care să-și serbeze ziua

de naștere în aceeași dată de 31 a anului. (Se va considera anul cu 365 zile.)

(Concurs elevi, 1974)

3. Un candidat trebuie să extragă trei bilete la oral din cele douăzeci și două pregătite de examinator, care cuprind: zece bilete la algebră, șapte de trigonometrie și cinci de aritmetică. Candidatul trage succesiv trei bilete fără a pune la loc un bilet pe care l-a tras.

a) Care este probabilitatea ca cele trei bilete să fie de algebră?

b) Care este probabilitatea de a trage în ordine un bilet de algebră, unul de trigonometrie, unul de aritmetică?

(Bacalaureat, Paris, 1966)

4. Fie 4 urne cu următoarele compoziții: urna U_1 conține 7 bile albe și 2 bile negre, urna U_2 conține 8 bile albe și 4 bile negre, urna U_3 conține 10 bile albe și 12 bile negre, urna U_4 conține 8 bile albe și 12 bile negre. Din aceste urne se extrage o bilă albă. Care este probabilitatea ca bila să fi fost extrasă din urna U_3.

TESTUL 77

1. Tabloul de distribuție al unei variabile aleatoare X este:

$$X\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}.$$

Se cere:

a) distribuția variabilei X^2.
b) distribuția variabilei $3X$.
c) distribuția variabilei X^{-1}.
d) media variabilei X.
e) media variabilei X^{-1}.
f) dispersia variabilei X.
g) dispersia variabilei $3X$.

2. Fie variabilele aleatoare independente:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2\end{pmatrix}.$$

Se cere:

a) distribuția sumei $X + Y$.

b) distribuția produsului $X \cdot Y$.

c) media variabilei X.

d) media variabilei Y.

e) media variabilei $X + Y$.

f) media variabilei XY.

g) dispersia variabilei $X + Y$.

h) dispersia variabilei XY.

i) dispersia variabilei Y.

j) abaterea medie pătratică a variabilei Y.

3. O variabilă aleatoare X ia valorile 1, 2, 3. Să se găsească repartiția acestei variabile aleatoare știind că $M(X) = \frac{7}{4}$ și $D^2(X) = \frac{11}{6}$.

TESTUL 78

1. Se aruncă două zaruri. Se cere tabloul de distribuție al variabilelor aleatoare care reprezintă suma și respectiv produsul punctelor obținute.

2. Coeficienții ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ se determină prin aruncarea unui zar. Se cere:

a) Probabilitatea ca ecuația dată să aibă rădăcini egale.

b) Probabilitatea ca ecuația dată să aibă rădăcini distincte.

c) Probabilitatea ca rădăcinile ecuației să fie $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$.

3. Pentru controlul de calitate al unui lot de 1000 de piese, se extrag deodată 100 de piese. Se cere să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de piese rebut din cele 100 de piese extrase, știind că probabilitatea de a extrage o piesă rebut din lot este 0,3. Apoi să se calculeze valoarea medie, dispersia și abaterea medie pătratică a acestei variabile.

4. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de puncte apărut prin aruncarea unui zar și să se reprezinte poligonul de repartiție.

I.12. NOȚIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

TESTUL 79

I. Să se găsească două numere naturale știind că diferența lor este 15, iar împărțind pe primul la 16 și pe cel de al doilea la 11 se obțin cîturi și resturi egale ($C_1 = C_2$; $r_1 = r_2$).

II. Fie a și b două numere întregi, $|a| < |b|$, iar q și r cîtul, respectiv restul împărțirii lui a la b.

Să se determine numerele a și b în situațiile:

1) $a + b = 970$, $q = 68$, $r = 4$.

2) $a + b = 942$, $q = -68$, $r = 4$.

3) $a + b = -942$, $q = -69$, $r = 10$.

4) $a + b = -970$, $q = 69$, $r = 10$.

III. Fie N pătratul unui număr întreg. Să se arate că:

1) N este multiplu de 4 sau împărțit la 8 dă rest 1.

2) Restul împărțirii lui N la 16 este un pătrat perfect.

IV. Să se arate că orice obiect al cărui preț este un număr întreg de lei mai mare decît 7 poate fi plătit fără rest cu monede de 3 lei și 5 lei.

TESTUL 80

I. Să se arate că:

1) Produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2.

2) Produsul a trei numere consecutive este divizibil cu numerele 2 și 3.

3) Produsul a patru numere consecutive este divizibil cu numărul 12.

4) Produsul a trei sau patru numere consecutive nu poate fi pătrat perfect.

II. Să se arate că oricare ar fi $n \in N$ rezultă:

1) $2 \mid (n^2 + 3n + 2)$;

2) $3 \mid (2n^3 + n)$;

3) $6 \mid (n^3 + 6n^2 + 11n + 6)$;

4) $6 \mid n(n+1)(2n+1)$;

5) $30 \mid (n^5 - n)$.

(Prin notația „$a \mid b$" se înțelege „a divide b")

III. Să se arate că oricare ar fi $n \in N$, impar $n > 1$ rezultă:

1) $8 \mid (n^2 - 1)$;

2) $240 \mid (n^5 - n)$;

3) $512 \mid (n^{12} - n^8 - n^4 + 1)$.

IV. Să se demonstreze că produsul a opt numere naturale consecutive nu poate fi pătratul unui număr.

(G.M.B.)

TESTUL 81

I. Să se arate că:

1) $1000 \mid (81^{125} + 121^{25} - 2)$;

2) $2^5 \cdot 3^3 \cdot 19 \mid (7^{25} - 7^{22} - 7^3 + 1)$.

II. Să se arate că oricare ar fi $n \in N$ rezultă:

1) $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$;

2) $33 \mid (95^n - 40^n - 35^n + 13^n)$;

3) 49 nu divide numărul $(n^2 + 3n + 4)$.

III. Să se arate că oricare ar fi $m \in N$, $n \in N$, $p \in N$ rezultă:

1) Dacă $30 \mid (m^2 + n^2)$ atunci $30 \mid (m + n)$;

2) Dacă $6 \mid (m + n + p)$ atunci $6 \mid (m^3 + n^3 + p^3)$.

TESTUL 82

I. Să se arate că pentru orice $n \in N$, numărul:

$$A = n \cdot 25^{n+1} - 36(n+1) \cdot 25^{n-1} - 6 : 25^n + 31 \cdot 6^n$$

este divizibil cu 19 și 31.

II. Să se arate că $(a + b) \mid (ma + nb)$ atunci și numai atunci cînd $(a + b) \mid (na + mb)$, $(\forall)$ $m, n \in N$.

III. Să se arate că oricare ar fi $a \in N$ și $b \in N$ rezultă:

$$2 \mid (a^2b + a^2 + 2ab + a + ab^2 + b^2 + b).$$

IV. Să se determine toate numerele naturale n, pentru care:

1) $3 \mid (2^n + 1)$;

2) $2^n \mid (3^n + 1)$.

(Concurs, R.P. Ungară)

TESTUL 83

I. Să se determine c.m.m.m.c. al numerelor:

1) 1470; —840; 672.

2) 21024; —209664.

II. Să se determine cel mai mic număr întreg și pozitiv care împărțit la 6; 8; 9; 12; 16 să dea de fiecare dată rest 4.

III. Să se determine două numere a și b naturale știind că:

1) $a \cdot b = 6750$ și $(a, b) = 15$

2) $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ și $(a, b) = 54$

3) $\frac{a}{b} = \frac{6}{11}$ și $[a, b] = 1386$

4) $(a, b) = 40$ și $[a, b] = 3600$

(S-a notat prin: „(a, b)" cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar prin „$[a, b]$" cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b).

IV. Să se arate că oricare ar fi $n \in Z$ numărul $n + 3$ nu divide numărul $n^2 + 6n + 8$.

TESTUL 84

I. Să se arate că următoarele numere nu sînt prime: 391; 899; 1331; 1519 și 9919.

II. Să se determine mulțimile $M_i (i = 1, 2, 3, 4)$.

$$M_1 = \left\{ x \in N \;/\; \frac{16}{x+2} \in N \right\};$$

$$M_2 = \left\{ x \in Z \;/\; x + \frac{9}{x+4} \in Z \right\};$$

$$M_3 = \left\{ x \in Z \;/\; \frac{7x+1}{x-2} \in N \right\};$$

$$M_4 = \left\{ x \in Z \;/\; \frac{2x^2 - 8x + 6}{x-4} \in Z \right\}.$$

III. Să se arate că oricare ar fi $n \in Z$, numerele $3n + 2$ și $10n + 7$ sînt prime între ele.

IV. Să se arate că oricare ar fi $a \in Z$, $b \in Z$ și $c \in Z$ rezultă:

1) $(7a + 5b,\ 4a + 3b) = (a,\ b)$;

2) $(2a + b + 4c,\ 3a + 2b + c,\ 2a + b + 3c) = (a,\ b,\ c)$.

TESTUL 85

I. Să se determine elementele mulțimilor M_1, M_2 și M_3 unde:

$M_1 = \{x \in Z \text{ și } y \in Z \;/\; x^2 - y^2 + 2 = 0\}$;

$M_2 = \{x \in N \text{ și } y \in N \;/\; (x + 2)(y + 3) = 2xy\}$;

$M_3 = \{x \in N \;/\; x^4 + 1 \text{ este număr prim}\}$.

II. Să se arate că oricare ar fi $a \in Z$, $b \in Z$ și $c \in Z$ rezultă:

$$[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(a, c)(b, c)}.$$

III. Fie numerele:

$$A = n; \quad B = n + 4; \quad C = 4n + 11.$$

Să se determine $n \in N$ astfel ca A, B, C să fie numere prime.

IV. Să se arate că dacă, oricare ar fi numerele $x \in Z$, $y \in Z$, $z \in Z$ și $t \in Z$ ce verifică relația: $xy = zt$ atunci numărul $N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ nu este număr prim.

1.13. POLINOAME CU COEFICIENȚI COMPLECȘI

TESTUL 86

I. Fie polinoamele: $f = 5 + X - 3iX^2 + X^3$ și $g = 3 - 5iX + X^2$. Se cere să se calculeze:

1) $f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2})$;   4) $g(a + ib) + g(a - ib)$;

2) $g(1 + i\sqrt{3}) + g(1 - i\sqrt{3})$;   5) $f + g$;

3) $f(a + \sqrt{b}) + f(a - \sqrt{b})$;   6) $f \cdot g$.

II. Să se determine polinomul de gradul al treilea: $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ astfel încît:

$$f(0) = i,\ f(-1) = -2\frac{1}{2} - \sqrt{3} + i,\ f(1) = 3\frac{1}{2} + \sqrt{3} + i;$$

$$f(i) = -\frac{1}{2} - (2 - \sqrt{3})\,i.$$

TESTUL 87

I. Să se calculeze: grad $(f + g)$, grad $(f - g)$ și grad (fg) dacă:

1) $f = 2 - 3X + X^2 - X^3$ și $g = X - 5X^2 + X^3$;

2) $f = (3 - 2i) + (5 - i)X + 2iX^4$ și $g = 1 + 2iX^3 - 2iX^4$;

3) $f = 2i - (5 + 4i)X$ și $g = (5 + 4i)X - iX^2$.

II. Să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g dacă:

1) $f = (11 - 4i)X - (10 + 13i)X^2 + (6 - 4i)X^3 - 10X^4 - (4i - 15)X^5 + 6iX^6$ și $g = 2X^2 - 5iX$;

2) $f = -3 + 3X + X^4 - 3X^{n-3} + 3X^{n+1} + X^{n+4} - X^3 - X^n$ și $g = X^3 + 3$.

III. Fie polinoamele: $f = 1 + X^7 + X^{14}$ și $g = X^2 + X + 1$. Se cere să se determine (f, g) și $[f, g]$.

TESTUL 88

I. Să se determine coeficienții m și n, astfel încît polinomul $f = 1 + mX^3 + nX^4$ să se dividă prin $g = 1 - X^2$, folosind:

a) teorema lui *Bézout*;
b) schema lui *Horner*;
c) împărțirea polinomului f prin g.

II. Fie polinomul $f = -2 + 3X + 5X^2 - X^3 + X^4$. Se cere să se afle restul împărțirii lui f prin $g = X - 1$ folosind:

a) schema lui *Horner*;
b) împărțirea polinomului f prin g;
c) teorema lui *Bézout*.

III. Să se determine (f, g) și $[f, g]$ pentru:

a) $f = -4 - 5X + 6X^2 - 4X^4 - 5X^5 + 6X^6$ și $g = -4 - 5X + 6X^2 - 4X^3 - 5X^4 + 6X^5$;

b) $f = 2 + X + 2X^4 + X^5$ și $g = 2 + 3X + X^2 + 2X^5 + X^6$.

TESTUL 89

1. Fie polinoamele: $f = X^5 + mX^4 + X^3 + nX^2 + pX + 12$ și $g = X^3 + aX^2 + bX + 6$.

a) Să se determine parametrii reali a și b știind că polinomul g, se divide prin $X^2 - X - 2$, și apoi să se rezolve ecuația $g(x) = 0$.

b) Cu a și b determinați la punctul precedent, să se afle valorile parametrilor reali m, n, p astfel încît polinomul f să se dividă cu polinomul g.

2. Fie polinomul $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Se cere să se determine coeficienții reali a, b, c, d, astfel încît $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^4$.

3. Să se arate că dacă un polinom f este divizibil prin $X - a$, $X - b$, $X - c$, $a \neq b \neq c$, atunci este divizibil și prin polinomul produs $(X - a)(X - b)(X - c)$.

TESTUL 90

1. Restul împărțirii unui polinom f de grad $\leqslant 3$ prin $X - a$ este r_1, prin $X - b$ este r_2, prin $X - c$ este r_3. Se cere să se calculeze restul r al împărțirii polinomului f prin $(X - a)(X - b)(X - c)$.

Aplicație: $a = 1$, $r_1 = 2$, $b = -1$, $r_2 = 1$, $c = 2$, $r_3 = 0$.

2. Fie polinomul $f = mX^3 + X^2 + nX + p$.

a) Să se determine coeficienții reali m, n, p astfel încît polinomul împărțit la $X - 1$ să dea restul $r_1 = 4$, împărțit la $X + 2$ să dea restul $r_2 = -5$ și să fie divizibil prin $X + 1$.

b) Să se determine polinomul g astfel ca: $g(X + 1) - g(X) = f(X)$ și $g(0) = -1$, unde f este polinomul de la punctul a).

c) Să se calculeze suma $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

3. Să se simplifice fracția

$$h = \frac{2X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 9X + 6}{X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2}.$$

TESTUL 91

1. Fie ecuația: $x^3 - x^2 + \alpha x + 3\alpha - 4 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3; $\alpha \in R$.

a) Să se calculeze $E(\alpha) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;

b) Să se determine $\alpha \in Z \setminus \{7\}$ și apoi să se rezolve ecuația știind că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 3$;

c) Să se calculeze valorile parametrului real m, astfel ca: $x_1^n + x_2^n + x_3^n - m = 0$; x_1 x_2 x_3 fiind rădăcinile de la punctul b).

2. Fie polinomul $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avînd coeficienții a, b, c, d (în această ordine) în progresie geometrică cu rația $q > 0$; $q \in R$.

a) Să se arate că ecuația $f(x) = 0$, are o singură rădăcină reală și că toate rădăcinile acestei ecuații au același modul.

b) Notînd cu x_1, x_2, x_3, rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, să se arate că oricare ar fi numărul natural, n, suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ este reală. În ce caz $S_n > 0$?

c) Pentru $a = 1$, să se determine rația q astfel ca ecuația $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 16$ să admită rădăcina $x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ și apoi să se rezolve această ecuație.

d) Dacă în ecuația inițială $f(x) = 0$, $a = -d = m$ și $-b = c = n$, să se arate că pentru orice valori ale lui m și n rădăcinile ecuației sînt în progresie geometrică.

(I.P., București, 1976, mai puțin punctul d)

TESTUL 92

1. Fie polinomul $f = m(X - a)^3 + n(X - b)^3 + p(X - c)^3$, cu a, b, c constante date, reale și diferite, iar m, n, p trei parametri cu valori reale. Să se arate că:

a) Dacă polinomul f are gradul zero atunci toți coeficienții săi sînt nuli.

b) Dacă $f(a) = f(b) = 0$ atunci și $f(c) = 0$.

(I.P., București, 1974)

2. Fie ecuația (E_1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$.

a) Să se formeze ecuația (E_2) ale cărei rădăcini sînt inversele rădăcinilor ecuației date.

b) Să se găsească condiția ca cele două ecuații să aibă o rădăcină comună și în acest caz să se rezolve (E_1).

c) Să se rezolve ecuația $x^3 - \frac{11}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - 3 = 0$.

TESTUL 93

1. Să se determine parametrul real α și să se rezolve ecuația $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + \alpha = 0$, știind că $x_1x_2 = x_3x_4$; (x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației).

2. Să se rezolve ecuația $6x^4 - 5x^3 - 75x^2 + \alpha x + 24 = 0$ știind că rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale ecuației satisfac relația:

$$\frac{1}{x_1x_4} + \frac{1}{x_2x_3} = 1.$$

3. Să se rezolve ecuația $16x^4 - 64x^3 + 56x^2 + 16x - 15 = 0$, știind că are rădăcinile în progresie aritmetică.

4. Să se găsească o relație între coeficienții a, b, c astfel încît ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ să admită:

a) două rădăcini opuse.

b) rădăcinile în progresie geometrică.

c) suma a două rădăcini să fie egală cu suma celorlalte.

TESTUL 94

1. Să se găsească condiția ca ecuațiile: $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta = 0$ și $g(x) = x^2 + \alpha x + \beta = 0$, să aibă o rădăcină comună și să se determine această rădăcină ($\alpha \in R$, $\beta \in R$).

2. Să se rezolve ecuațiile $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$ și $g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$, știind că au rădăcini comune.

3. Să se rezolve ecuația $f(x) = x^6 + 2x^5 - 8x^4 - 14x^3 + 11x^2 + 28x + 12 = 0$ știind că are rădăcini multiple.

TESTUL 95

1. Fie ecuația $f(x, m) = x^3 - 2(m + 1)x^2 + (6m - 1)x - 4m + 2 = 0$ și $g(x, m) = x^2 - (m + 3)x + 2(m + 1) = 0$, unde $m \in R$.

a) Să se arate că cele două ecuații au o rădăcină comună oricare ar fi valoarea parametrului m.

b) Să se afle valorile parametrului m astfel ca ecuațiile să aibă încă o rădăcină comună și să se rezolve în acest caz.

c) Notînd cu m_0 cea mai mică valoare a lui m, care satisface condițiile de la punctul precedent să se rezolve inecuația:

$$\frac{1}{f(x, m_0)} - \frac{1}{g(x, m_0)} > 1.$$

(Institutul Pedagogic, Suceava, 1971).

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^6 - 6x^5 + 17x^4 - 28x^3 + 28x^2 - 16x + 4 = 0$;

b) $36x^4 - 36x^3 - 7x^2 + 16x - 4 = 0$.

TESTUL 96

1. Să se determine parametrul rațional m, și să se rezolve ecuațiile de mai jos:

a) $x^4 - mx^3 - 29x^2 + 13x + 42 = 0$ știind că admite rădăcina $3 + \sqrt{2}$.

b) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 2x + m = 0$ știind că admite rădăcina $1 - \sqrt{3}$.

c) $x^4 - mx^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ știind că admite rădăcina i.

d) $x^5 - x^4 - 2x^3 + mx^2 + 9x + (m - 11) = 0$ știind că admite rădăcina $\sqrt{2} - i$

e) $x^4 + mx^3 + 3x^2 + (m + 6)x - 6 = 0$ știind că admite rădăcina $1 + i$.

2. Să se determine rădăcinile raționale ale ecuațiilor:

a) $3x^3 + 7x^2 + x - 35 = 0$.

b) $16x^6 - 16x^5 - 56x^4 - 4x^3 + 37x^2 + 20x + 3 = 0$.

TESTUL 97

Să se rezolve ecuațiile:

1. $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$.
2. $3x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$.
3. $x^3 - (1 - i)x^2 - (1 - i)x + 1 = 0$.
4. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$.
5. $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 4x + 1 = 0$.
6. $x^5 - 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 2x + 1 = 0$.

TESTUL 98

1. Să se rezolve ecuația: $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2x^6 - 7x^4 + 7x^2 - 2 = 0$.

b) $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 = 0$.

3. Să se discute după valorile parametrului real m, ecuațiile:

a) $2(m - 1)x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 2(m - 1) = 0$.

b) $x^6 + (m + 1)(x^2 + 1) + 1 = 0$.

(A.S.E., București).

c) $2mx^4 - (3m - 8)x^3 + 2(m + 2)x^2 - (3m - 8)x + 2m = 0$.

I.14. TESTE RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A X-A

TESTUL 99

1. Fie polinoamele: $f = X^5 + aX^4 + a^2X^3 + a^3X^2 + a^4X + a^5$ și $g = X^2 + aX + a^2$ cu $a \in R \setminus \{0\}$. Se notează cu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rădăcinile polinomului f.

a) Să se arate că f este divizibil cu g și că f admite o singură rădăcină reală.

b) Să se verifice că toate rădăcinile polinomului f au același modul și că dacă x_1 este rădăcina reală a polinomului f, între celelalte rădăcini au loc relațiile: $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ și

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 0.$$

c) Să se arate că: $(x - a) f(x) + (x + a) f(-x) = 0$ și să se deducă de aici că nu există valori opuse ale lui x în care f să ia valori egale diferite de zero.

(I.P., București, 1972).

2. Fie binomul $(a + b)^m$ unde $a = \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}$, $b = \sqrt[5]{2^{x-2\lg 3}}$ logaritmul fiind în baza 10. Să se determine valoarea lui x pentru care termenul ce conține pe b^5 este egal cu 21, iar coeficienții binomiali ai termenilor al doilea, al treilea și al patrulea sînt în progresie aritmetică.

(I.P., București, 1970).

3. Să se arate că suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, $n \in N$ se divide cu 5, dacă și numai dacă exponentul n, nu se divide cu 4.

(Concurs, Ungaria)

TESTUL 100

1. Fie ecuația: $4(1 + a^2)x^4 - 8(a^2 + a + 1)x^3 - (a^2 - 16a + 1)x^2 + 2(n^2 + a + 1)x - 4a = 0$, unde a este un parametru real.

a) Să se arate că ecuația admite rădăcini raționale independente de a.

b) Să se arate că oricare ar fi a real, ecuația are trei rădăcini reale în intervalul $[-1, 1]$.

c) Să se găsească valorile lui a pentru care ecuația dată are o rădăcină dublă.

d) Să se determine valorile lui a pentru care avem relația:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{17}{2}$$

(I.P., București, 1970).

2. Fie a, b, c, d, m numere întregi, astfel ca $am^3 + bm^2 + cm + d$ să se dividă cu 5, dar d să nu fie divizibil cu 5. Să se demonstreze că există totdeauna un număr întreg n, astfel ca și $dn^3 + cn^2 + bn + a$ să se dividă cu 5.

(Concurs, Ungaria)

3. Să se calculeze sumele:

a) $\sum_{k=1}^{n} \{3[(k-1)^2 + k] - 2\}, \quad k \in Z.$

b) $\sum_{k=1}^{n} (4k-3)^3; \quad k \in Z.$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^p; \quad k \in Z, \quad p \in Z.$

TESTUL 101

1. Să se determine $m \in R$, știind că rădăcinile ecuației $x^3 + 9m^2x^2 - x - (20m + 128)x^2 + 3 = 0$ sînt în progresie aritmetică.

2. Să se calculeze $\sum_{n=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}}$.

(G.M.B., 1974)

3. Fie ecuația:

$$x^3 + 2(m-1)x^2 - (m-2)x - m - 1 = 0, \text{ unde } m \in R.$$

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației știind că are o rădăcină întreagă.

b) Să se determine valorile lui m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6$.

c) Dacă se notează cu x_1 rădăcina întreagă a ecuației, se cere să se determine rădăcinile raționale ale ecuației:

$$\lg \frac{1}{2} | x_2 - x_3 | - \lg(5m - 6) - \lg(m + 3) = 0.$$

(I.P., București, 1971)

TESTUL 102

1. Fie ecuația $x^3 - mx + m - 1 = 0$, unde $m \in R$. Să se determine m astfel ca ecuația să admită o rădăcină dublă.

2. Să se găsească rădăcinile întregi ale ecuațiilor:

a) $x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6 = 0$.

b) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2 = 0$.

3. Să se demonstreze identitatea:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot C_{2n}^{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k+1}\right)^2 = 1.$$

(G.M.B., 1966).

4. Să se calculeze suma: $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} (k + 1)! k$.

(Matematica v școle, 1960).

TESTUL 103

1. Să se găsească coeficientul lui x^8 din dezvoltarea

$$(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)^4.$$

Să se rezolve inecuațiile:

a) $| \log_3 | x || < 1$

b) $\log_{1+x}(2 - x) < 1$

c) $2^{|x|-1} \leqslant | 2^x - 1 |$

3. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze:

a) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $(\forall)$ $n \in N - \{1\}$.

b) $\frac{7}{(1 \cdot 6)^2} + \frac{17}{(6 \cdot 11)^2} + \ldots + \frac{10n-2}{[(5n-4)(5n+1)]^2} < \frac{1}{5}$.

c) $2\sqrt[n]{n!} < n+1$, $(\forall)$ $n \geq 2$.

(G.M.B., 1967).

4. În dezvoltarea $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali este cu 504 mai mică decît suma coeficienților binomiali din dezvoltarea $(a+b)^{3n}$. Să se afle termenul al treilea al primei dezvoltări.

TESTUL 104

1. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\frac{2\log_a^2 x - 3\log_a x + 1}{x^2 - 1} > 0$, $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

b) $\log_5 x > \log_{125}(3x-2)$.

c) $\log_{0.3}(x-1) < \log_{0.09}(x-1)$.

2. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} \log_3(\lg x + \lg y) - \log_9(\lg y) = 1 \\ \log_9(\lg x - \lg y) - \log_3(\lg y) = 0. \end{cases}$

(I.P., Brașov, 1970)

b) $\begin{cases} x^{x^2 - y^2 + 8x + 1} = 1 \\ 2^y = 8 \cdot 2^x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = m \\ \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n. \end{cases}$; $m \in R$, $n \in R$ $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

(Institutul pedagogic, Cluj, 1970)

d) $\begin{cases} 9^{\sqrt[3]{x}} + 4^{\sqrt[4]{y}} = 97 \\ 3^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{y}} = 36 \end{cases}$

TESTUL 105

1. Să se arate că $E = 3 \cdot 5^{2n+3} \cdot 7^{2n} - 3^{n+1} \cdot 4 \cdot 5^{n}$ se divide prin 11 $(\forall)$ $n \in N$.

2. Care numere naturale pot fi scrise ca diferența de două pătrate de numere întregi?

(G.M.B., 1970).

3. Să se arate că expresia $42^n [2^n(42^n - 1) - 1] + 1$ este divizibilă cu 3 403 pentru orice număr natural n.

4. Să se rezolve ecuația $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2(n-k)+1} = 0$.

(G.M.B., 1972).

5. Fie ecuația: $\dfrac{2^x + a \cdot 3^x}{2^x - a \cdot 3^x} = 2$.

a) Să se rezolve această ecuație.
b) Care sînt valorile lui $a \in R$, pentru care rădăcina este un număr întreg.

(Facultatea de Studii Economice, Craiova).

6. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[x]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[x]{26 - 15\sqrt{3}} = 4$

b) $\sqrt[x]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[x]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$

c) $\sqrt[x]{41 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[x]{41 - 29\sqrt{2}} = 2$

I.15. DETERMINANȚI ȘI MATRICE

TESTUL 106

1. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ Se cere:

a) să se calculeze A^2, A^3;
b) să se calculeze det $P(A)$ unde $P(A) = 2A + A^2 - A^3$;
c) să se determine x, y, z, t astfel ca $A \cdot B = E_2$ unde:

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(Q) \text{ iar } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Fie matricele: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ și $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Să se precizeze dacă se pot efectua produsele AB și BA.
b) Să se compare matricele $M_1 = A \cdot B$ și $M_2 = B \cdot A$.

3. Să se calculeze A^n dacă $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $n \in N$.

TESTUL 107

1. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Să se verifice dacă matricea este singulară.
b) Să se calculeze rangul acestei matrice.
c) Să se calculeze det $f(A)$, unde $f(x) = 2x^2 - 3x$.

2. Să se calculeze determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 c \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \end{vmatrix}$.

TESTUL 108

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & -1 & x \\ x & 0 & -x \end{vmatrix} = 0$.

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3-x & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1-x & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$

2. Folosind regula lui *Cramer* să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ -x + 2y + z = -1 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z + t = -1 \\ x - y - z + 2t = 0 \\ -3x + 2y + 2z - t = -1 \\ x + y + z - 3t = 2 \end{cases}$

3. Fie matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Să se calculeze rangurile și inversele lor (dacă sînt nesingulare).

b) Să se rezolve ecuația $AXB = C$, unde $X \in M_3(Q)$.

I.16. SISTEME LINIARE

TESTUL 109

I. Să se găsească toate matricele de forma

$X = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ pentru care $X^2 + X = \frac{1}{4} I$, unde I este matricea unitate, iar $x \in R$ și $y \in R$.

(Adm. înv. superior, 1978)

II. Să se rezolve și să se discute după $\alpha \in R$ următorul sistem:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 3y + 2z = 3 \\ 3x + \alpha y + 4z = 1 \end{cases}$$

III. Să se rezolve și să se discute următorul sistem după diferite valori ale parametrilor reali α și β:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 4 \\ x + \beta y + z = 3 \\ x + 2\beta y + z = 4 \end{cases}$$

IV. Să se determine parametrii reali a, b, c astfel ca sistemul să fie dublu nedeterminat și apoi să se rezolve:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = 1 \\ x + 9y + az + t = -3 \\ 5x - 6y + 10z + bt = c \end{cases}$$

I. Fie ecuația $f(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Să se rezolve;

b) Să se discute după parametrul real λ numărul rădăcinilor reale, cît și intervalele în care se găsesc rădăcinile ecuației

$$\frac{1}{8} f(x) = \lambda\,(x^2 - 1);$$

c) Să se determine valorile lui λ pentru care:

$-2 < \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} < 1$; x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației de la punctul b).

(I.P., București, 1974)

II. 1. a) Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

b) *Discuție.*

2. a) Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} & e^{2a} \end{vmatrix}$$

b) Să se rezolve ecuația $D = 0$.

3. Fie M_k mulțimea matricelor de forma:

$M_k = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ ky & x \end{bmatrix} / \; x,\; y \in Z \right\}$, unde k este un număr întreg fixat, iar Z reprezintă mulțimea numerelor întregi.

a) Să se arate că suma a două matrice din M_k aparține lui M_k.

b) Să se arate că produsul a două matrice din M_k aparține lui M_k.

(A.S.E., București, 1976)

TESTUL 111

I. Fie numerele $N_i = \overline{a_i b_i c_i}$ scrise în baza 10, $i = 1, 2, 3$. Dacă cele trei numere sînt divizibile cu 31 atunci și determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

este divizibil cu 31. Să se generalizeze pentru n numere a cîte n cifre și pentru un divizor oarecare $b \in Z$, $b \neq 0$.

II. 1. Se consideră sistemul $\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \alpha = \dfrac{1}{x} \\ x + \dfrac{1}{2\alpha} = y \end{cases}$; $\alpha \in R$.

a) Să se determine soluțiile sistemului;

b) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuațiilor în y, obținute prin eliminarea lui x din sistem;

c) Să se determine valorile lui α astfel încît rădăcinile ecuației de la punctul b) să fie una mai mică decît 2 și cealaltă mai mare decît 2.

2. Se dau matricele:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix} \text{ și } B = \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix}; \; x, y, z \in R.$$

a) Să se arate că dacă $AB = BA$ atunci $x = y = z$.

b) Să se calculeze det $(A^2 - A)$ pentru $x = y = z$.

(A.S.E., București, 1977)

16. Să se calculeze: $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

TESTUL 112

Să se arate că sistemele omogene de mai jos nu admit decît soluția banală.

1. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 10x - y - z = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6x + 3y - 7z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 5x + 2y - 6z = 0. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x + 3y + 5z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ 5x + 3y + z = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 4y - 9z = 0 \\ -4x + y - 4z = 0 \\ -9x - 4y + z = 0. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 7x - 3y - z = 0 \\ x + 8y + 31z = 0 \\ 6x - y + 3z = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x - 3y - z = 0 \\ x + 31z = 0 \\ -2x - y + 3z = 0. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} y + z + 4t = 0 \\ 4x + z + t = 0 \\ x + 4y + z = 0. \end{cases}$

TESTUL 113

1. Să se arate că sistemele omogene de mai jos admit și soluții diferite de zero și să se rezolve:

a) $\begin{cases} 4x + 3y - 7z = 0 \\ x - y = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + 3y + 31z = 0 \\ x - y + 3z = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y+z=0. \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x \quad +z=0 \\ x \quad -z=0 \\ y \quad =0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-5y-6z=0 \\ 2x+y-4z=0 \\ 3x+5y-7z=0. \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+4y+7z=0 \\ 2x+y+7z=0 \\ x-2y+z=0. \end{cases}$

2. Să se rezolve și să se discute sistemele:

a) $\begin{cases} x-2y+mz=0 \\ 2x+y+7z=0 \\ x+4y+7z=0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ 2x-y+3z-3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x+(m-1)y+2z+mt=0. \end{cases}$

În atenția cititorului

Elevii clasei a XI-a pot aborda:

a) pentru calculul rangului unei matrice, matrice inversă, ecuații matriceale, testele: 130, 131, 132, 133, 141, 142.

b) pentru studiul sistemelor liniare, testele: 134, 135, 136, 143, 144.

I.17. LEGI DE COMPOZIȚIE

STRUCTURI ALGEBRICE

TESTUL 114

1. Pe mulțimea Q a numerelor raționale se definește legea de compoziție „*", prin care fiecărui cuplu (x, y) de numere raționale, îi corespunde numărul rațional $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y + 3xy$.

a) Să se arate că legea de compoziție "*" este comutativă.

b) Să se arate că este asociativă.

c) Să se determine elementul neutru.

d) Să se determine elementul simetric al numărului $x \in Q \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

e) Mulțimea $Q \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ înzestrată cu legea de compoziție "*", formează o structură de grup?

f) În mulțimea Q să se rezolve ecuațiile:

$$x * 3 = 2 \text{ și } (-5) * x = 1.$$

(După „Journal des mathématiques élémentaires", 1969)

2. Fie Z mulțimea numerelor întregi și $E = Z \times Z$. Mulțimea E este înzestrată cu operația binară "*", definită prin $(a, b) * (a', b') \overset{\text{def}}{=} (aa', ab' + ba')$; $(\forall)$ perechile (a, b) și (a', b') din E.

a) Să se studieze asociativitatea și comutativitatea operației.

b) Să se arate că legea de compoziție "$*$" are element neutru.

c) Unui element fixat $(a, b) \in E$, i se asociază aplicația:

$$f: E \to E \text{ prin } (x, y) \xrightarrow{f} (a, b) * (x, y)$$

Dacă $a \neq 0$ să se arate că f este injectivă. Să se arate că f este surjectivă atunci și numai atunci cînd $a = 1$ sau $a = -1$.

(Bacalaureat, Franța, 1970).

TESTUL 115

1. Fie a și b două numere reale menule. Se definește legea de compoziție $\circ$ astfel:

$$a \circ b \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

a) Să se arate că legea de compoziție "$\circ$" este comutativă.

b) Să se arate că în general, legea "$\circ$" nu este asociativă.

c) Ce condiții trebuie să îndeplinească numerele a, b, c, pentru ca această lege să fie asociativă.

(Concurs elevi, 1961)

2. Fie numerele întregi a, b, c. Pe mulțimea Z se definește legea de compoziție $\top$ astfel: $x \top y \overset{\text{def}}{=} axy + b(x + y) + c$.

Să se arate că:

a) Legea de compoziție "$\top$" este asociativă atunci și numai atunci cînd $b = b^2 - ac$.

b) Legea de compoziție "$\top$" are element neutru atunci și numai atunci cînd $b = b^2 - ac$ și c este divizibil cu b.

3. Pe mulțimea R a numerelor reale se definește legea de compoziție $\perp$ astfel:

$$a \perp b \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(a + b - ab + 1).$$

a) Să se arate că există un element neutru „e" pentru legea $\perp$.

b) Să se arate că orice element din R, afară de unul care se va determina, este simetrizabil.

c) Este legea $\perp$ asociativă? Determină această lege pe R o structură de grup?

(Concurs elevi, 1970)

TESTUL 116

1. Fie mulțimile de numere reale $M_1 \subset Q(\sqrt{2})$ și $M_2 \subset Q(\sqrt{2})$ de forma $a + b\sqrt{2}$ respectiv $a - b\sqrt{2}$.

a) Să se arate că M_1, M_2 constituie părți stabile ale lui R în raport cu adunarea, înmulțirea și formează structură de corp în raport cu operațiile induse.

b) Să se arate că aplicația $f: M_1 \to M_2$; $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ este un automorfism al corpului $Q[\sqrt{2}]$.

2. Fie $M = \left\{ A \in M_2(Z) \mid A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ a \in Z \right\}$.

a) Să se arate că M este o parte stabilă a lui $M_2[Z]$ în raport cu adunarea, înmulțirea matricelor și formează inel comutativ și fără divizori ai lui zero în raport cu operațiile induse.

b) Acest inel este izomorf cu inelul întregilor raționali.

3. Să se calculeze în Z_{11} expresia:

$$\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \hat{5} + \frac{\hat{8}}{\hat{3}} \cdot \frac{\hat{7}}{\hat{6}} \right) \cdot \frac{\hat{9}}{\hat{2}}.$$

TESTUL 117

1. a) Să se alcătuiască tabelele adunării și înmulțirii claselor de resturi modulo 6.

b) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{7}y = \hat{6}, \end{cases}$ în Z_8

2. Să se calculeze determinantul: $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{6} & \hat{5} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{6} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} \end{vmatrix}$ în Z_7

3. Să se afle cîtul și restul împărțirii polinomului $\hat{2}x^4 + \hat{3}x^3 + \hat{4}x^2 + x + \hat{3}$, la polinomul $\hat{3}x^2 + \hat{2}x + \hat{4}$, în Z_5.

TESTUL 118

Fie $G = (2, \infty)$ și legea de compoziție "$\top$" : $x \top y \overset{def}{=} xy - 2(x + y) + 6$, $(\forall)$ $x, y \in G$.

a) Să se arate că $(G, „\top")$ este un grup comutativ.

b) Să se determine $a, b \in R$ astfel încît funcția $f : R_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ să fie izomorfism de la grupul $(R_+^*, \cdot)$ la grupul $(G, „\top")$.

c) Să se arate că $\underbrace{x \top x \top x \ldots \top x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^n + 2$.

2. În grupul transformărilor unui dreptunghi rigid $ABCD$ vom nota cele 4 elemente astfel: transformarea identică cu I, simetria în raport cu axa (d) prin S, simetria în raport cu axa (d_1) cu T și simetria în raport cu centrul dreptunghiului cu U. Să se completeze tabla înmulțirii acestui grup.

3. a) Să se demonstreze că pe mulțimea $M \subset M_2(Q)$ a matricelor de forma $\begin{bmatrix} a + 2b & 3b \\ 2b & a - 2b \end{bmatrix}$, unde $a^2 - 10b^2 = 1$, înmulțirea determină o structură de grup.

b) Să se demonstreze că pe mulțimea $G \subset Q(\sqrt{10})$

$$G = \{a + b\sqrt{10} / a \in Q,\ b \in Q,\ a^2 - 10b^2 = 1\},$$

înmulțirea determină o structură de grup.

c) Să se arate că între grupul G și grupul M există un izomorfism $f : G \to M$, de forma

$$f(a + b\sqrt{10}) = \begin{bmatrix} a + 2b & 3b \\ 2b & a - 2b \end{bmatrix}.$$

TESTUL 119

I. Fie mulțimea $G = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, (unde ω_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt rădăcinile cubice ale unității) înzestrată cu legea de compoziție înmulțirea și mulțimea G a rotațiilor triunghiului echilateral înzestrat cu legea de compoziție produsul rotațiilor.

1. Să se arate că cele două mulțimi înzestrate cu legile de compoziție respective sînt grupuri.

2. Să se arate că cele două grupuri sînt izomorfe.

II. Să se arate că grupul aditiv al claselor de resturi modulo 6 și grupul permutărilor de trei elemente nu sînt izomorfe.

III. Fie $M_1 = \{z \in C / z = a + bi;\ a, b \in R\}$, $M_2 = \{z \in C / z = a - bi;\ a, b \in R\}$ şi aplicaţia $f : M_1 \to M_2$, $f(a + bi) = a - bi$.

1. Să se arate că cele două mulţimi înzestrate cu legile de compoziţie interne de adunare şi înmulţire formează inele;

2. Să se arate că f este automorfism a lui C.

I. 18. LEGI DE COMPOZIŢIE EXTERNE. SPAŢII VECTORIALE DE DIMENSIUNE FINITĂ

TESTUL 120

Să se arate că mulţimile de mai jos formează spaţii vectoriale peste corpul R faţă de operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire cu scalari.

1. Mulţimea matricelor de tipul mxn, cu elemente numere reale.

2. Mulţimea vectorilor din R^2 situaţi pe o dreaptă care trece prin origine.

3. Mulţimea funcţiilor $R^{[a, b]}$; $f : [a, b] \to R$, continue pe $[a, b] \subset R$.

4. Mulţimea polinoamelor $R[X]$ de grad $\leqslant 2$.

5. Mulţimea polinoamelor $R[X]$ de grad $\leqslant n$.

6. Mulţimea funcţiilor $R^{[a, b]}$; $f : [a, b] \subset R \to R$, cu proprietatea că există o constantă pozitivă k astfel încît:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k(x_1 - x_2), \quad (\forall)\ x_1 \in [a, b] \text{ şi } x_2 \in [a, b].$$

TESTUL 121

1. Să se arate că mulţimea polinoamelor $K[X]$ de gradul n, nu formează un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K.

2. Să se arate că mulţimea soluţiilor unui sistem omogen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

cu coeficienţi reali sau complecşi, formează un spaţiu vectorial.

3. Mulțimea R^t a tuturor funcțiilor care sînt cel puțin de două ori diferențiabile și satisfac ecuația:

$$X''(t) + X'(t) - 12X = 0,$$

formează un spațiu vectorial peste corpul numerelor complexe.

4. Se notează cu $S \subset C^n$ mulțimea șirurilor $x = \{\xi_n\}$, unde ξ sînt numere complexe care satisfac condiția:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty.$$

Pe S se definesc operațiile de adunare și înmulțire cu un scalar astfel:

$$x + y \overset{\text{def}}{=} (\xi_n + \eta_n); \quad \alpha x \overset{\text{def}}{=} (\alpha \xi_n) \quad \text{unde } x = (\xi_n) \text{ și } y = (\eta_n).$$

Să se arate că S este un spațiu vectorial peste C.

5. Să se arate că mulțimea vectorilor de poziție a punctelor dintr-un plan π, raportate la origine, formează un spațiu vectorial peste corpul numerelor reale în raport cu adunarea vectorilor și înmulțirea vectorilor cu scalari.

6. Corpul numerelor complexe poate fi considerat ca un spațiu vectorial peste corpul numerelor reale?

TESTUL 122

1. În spațiul vectorilor coloană R^4 se consideră vectorii:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că sistemul de vectori (x_1, x_2, x_3, x_4) este liniar independent.

2. Același enunț ca la punctul 1) pentru sistemele de vectori (x_1, x_2, x_3, x_4) de mai jos:

a) $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

b) $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

c) $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

TESTUL 123

1. În spațiul vectorial L al polinoamelor din $R[t]$ de grad mai mic sau egal cu doi se consideră sistemele de polinoame.

a) $f_1 = 1, \quad f_2 = t, \quad f_3 = t^2.$
b) $f_1 = 1 - t, \ f_2 = t(1 - t), \ f_3 = 1 - t^2.$
c) $f_1 = t^2 - 1, \quad f_2 = t^2 + 3t - 2, \quad f_3 = t^2 - 1.$
d) $f_1 = 1 + t, \quad f_2 = t, \quad f_3 = 2t^2.$

Care din aceste mulțimi de vectori a), b), c), d) formează o bază în spațiul vectorial L?

2. În spațiul R^3 se consideră vectorii: $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (0, 1, 1)$ și $f_4 (= (1, 1, 1)$. Să se arate că vectorii f_1, f_2, f_3, f_4 sînt liniari dependenți, dar oricare trei dintre ei formează o bază în R^3.

TESTUL 124

1. În spațiul R^2 vectorul $x = (1, 2)$ este exprimat în baza $\{e_1, e_2\}$, unde $e_1 = (1, 0)$ și $e_2 = (0, 1)$.

a) Să se arate că sistemul $\{f_1, f_2\}$, unde $f_1 = (3, 2)$, $f_2 = (6, 5)$ formează o bază.

b) Să se exprime vectorul x în baza $\{f_1, f_2\}$.

2. Sistemul de vectori $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ constituie în spațiul R^3 o bază. În această bază vectorul x are componentele $(1, 2, 3)$. Se cere:

a) Să se arate că vectorii $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ formează o bază în R^3.

b) Să se exprime vectorul $x = (1, 2, 3)$ în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$.

3. În spațiul vectorial L, al polinoamelor de grad cel mult doi, din $R[t]$ vectorii $x_1 = 1 + t$, $x_2 = t$, $x_3 = 2t^2$ formează o bază.

Se cere să se exprime în funcție de această bază vectorii: $x_4 = 1 - t + t^2$, $x_5 = 1 + 2t - t^2$.

4. În spațiul R^4 vectorii $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ și $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ formează o bază. În această bază vectorul x se scrie: $x = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$. Să se exprime acest vector în baza $f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, -1, -1)$, $f_3 = (1, -1, 1, -1)$ și $f_4 = (1, -1, -1, 1)$.

TESTUL 125

1. Să se exprime vectorul x în baza $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$:

a) $x = (1, 2, 0, 1)$; $f_1 = (4, 2, 2, 1)$; $f_2 = (2, 1, 0, 1)$, $f_3 = (0, -1, 1, 1)$, $f_4 = (5, 1, 4, 1)$.

b) $x = (1, 2, 3, 4)$; $f_1 = (1, 1, 0, 1)$, $f_2 = (0, 1, -1, -1)$, $f_3 = (2, 1, 3, 1)$, $f_4 = (1, 1, 0, 0)$.

c) $x = (1, 0, 1, 0)$, $f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (1, -1, -1, 1)$, $f_3 = (1, 1, -1, -1)$, $f_4 = (1, -1, 1, -1)$.

2. Să se stabilească formulele de transformare a coordonatelor, cînd se trece de la baza $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (2, 3)$ la baza $f_1 = (3, 2)$ $f_2 = (6, 7)$.

TESTUL 126

1. a) Să se stabilească formulele de transformare a coordonatelor cînd se trece de la baza $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ la baza $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (1, 1, 1)$.

b) Vectorul $x = (1, 2, 3)$ este exprimat în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$. Folosind formulele deduse la punctul a), să se scrie vectorul x în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$.

c) Să se compare rezultatul obținut cu acela de la exercițiul 2 din testul 124.

2. a) Să se stabilească formulele de transformare a coordonatelor, cînd se trece de la baza $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ la baza $f_1 = (1, 0, 0, 1)$, $f_2 = (0, 0, 0, 1)$, $f_3 = (1, -1, 1, -1)$, $f_4 = (1, -1, -1, 1)$.

b) Vectorii $x_1 = (1, 0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 2, 3, 4)$, $x_3 = (1, -1, -1, -1)$ sînt exprimați în baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Folosind formulele obținute mai sus, să se exprime acești vectori în baza $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

3. Să se stabilească formulele de transformare a coordonatelor, cînd se trece de la baza $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (2, 1, 3, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0, 0)$, $e_4 = (0, 1, -1, -1)$ la baza $f_1 = (1, 0, 0, 1)$, $f_2 = (0, 0, 0, 1)$, $f_3 = (1, -1, 1, -1)$, $f_4 = (1, -1, -1, 1)$, precum și formulele de trecere de la baza $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

4. a) Fie în spațiul vectorilor coloană R^3, următorii vectori:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Să se calculeze rang $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ și să se găsească un subsistem maximal liniar independent.

b) În spațiul K^3, unde $K = Z_3$, fie:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \hat{2} \\ \hat{0} \\ \hat{1} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \hat{2} \\ \hat{2} \\ \hat{0} \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} \hat{0} \\ \hat{2} \\ \hat{2} \end{bmatrix}.$$

Să se găsească un subsistem maximal liniar independent și să se stabilească rang (v_1, v_2, v_3, v_4).

I.19. METODE NUMERICE ÎN ALGEBRĂ

TESTUL 127

Fie două spații liniare V și V' peste corpul K. O aplicație $T: V \to V'$ se numește transformare liniară dacă:

1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$; $(\forall) x, y \in V$

2) $T(\alpha x) = \alpha \cdot T(x)$; $(\forall) \alpha \in K$ și $x \in V$

Dacă $T: V \to V$ atunci T se numește transformare liniară sau endomorfism al lui V.

1. Dacă se notează cu P_3 spațiul vectorial al polinoamelor din $R[x]$ de grad $\leqslant 3$, se cere:

a) Să se arate că sistemul de polinoame: $1, x, x^2, x^3$ formează o bază a spațiului P_3.

b) Același enunț ca la punctul a) pentru sistemul de polinoame: $1, x, \frac{1}{2} x^2, \frac{1}{3} x^3$.

c) Să se arate că aplicația T prin care fiecărui polinom $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ din P_3 îi corespunde $xf = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4$ este o aplicație liniară.

d) Dacă se notează cu D aplicația prin care fiecărui polinom $f \in P_3$ îi corespunde derivata sa f'(adică $D(f) = f'$) să se arate că aplicația D este liniară și că: $D[T(f)] - T[D(f)] = I$ unde I este aplicația identică.

2. Același enunț ca la exercițiul 1) pentru spațiul vectorial P_n al polinoamelor din $R[x]$ de grad $\leqslant n$ și pentru sistemele de polinoame:

a) $1, x, x^2, \ldots, x^n$

b) $1, x, \frac{1}{2} x^2, \frac{1}{3} x^3, \ldots, \frac{1}{n} x^n$.

3. Același enunț ca în exercițiul precedent, pentru spațiul vectorial al polinoamelor $P(t)$, de grad cel mult n peste corpul numerelor reale, și pentru bazele $\{1, t, t^2 \ldots t^n\}$ și $\left\{1, t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3} \ldots \frac{t^n}{n}\right\}$.

TESTUL 128

1. Fie doi operatori liniari T_1 și T_2 în spațiul R^3, care au matricele asociate $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ și $T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Se cere, să se determine imaginile vectorului $x = (1, 2, 3)$ prin următoarele transformări liniare:

a) T_1. d) $T_2 \cdot T_1$.

b) T_2. e) $T_1 + T_2$.

c) $T_1 \cdot T_2$. f) $T_2 + T_1$.

2. Fie operatorii liniari T_1 și T_2 dați de:

$$T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ și } T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine imaginea vectorului $x = (1; -1; -2)$. prin:

a) T_1. b) T_1^{-1}. c) T_2. d) T_2^{-1}. e) $T_1 + T_2$.
f) $(T_1 + T_2)^{-1}$.

3. Să se găsească inversa transformării liniare:

$y_1 = 2x_1$. $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$.

$y_2 = 3x_1 + 2x_2$. $y_4 = 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4$.

TESTUL 129

1. Fie V_1 un spațiu cu trei dimensiuni peste corpul numerelor raționale și $\{e_1, e_2, e_3\}$ o bază a sa. Dacă V_2 este un spațiu cu două dimensiuni peste corpul numerelor raționale și $\{f_1, f_2\}$ este o bază a sa, se cere:

a) Să se determine matricea transformării T dată de relațiile:

$$T(e_1) = -f_1 + f_2; \; T(e_2) = 2f_1 + 3f_2; \; T(e_3) = -f_1 - 2f_2.$$

b) Să se afle imaginea lui $x = 2e_1 - e_2 + 3e_3$, prin transformarea T.

2. Operatorului T definit pe R^3 i se atașează în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ matricea $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se cere să se găsească matricea operatorului T în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ unde:

$$f_1 = e_1 + 2e_2 + e_3;\ f_2 = 2e_1 + e_2 + 3e_3;\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

3. În spațiul vectorial $P_2(x)$, al polinoamelor cu coeficienți reali de grad cel mult doi, se cere să se determine matricele următorilor operatori:

a) $T_1 x = \int_{-1}^{1} P(x)dx$. b) $T_2(x) = (x^2 + 1)P'(x)$.

c) $Tx = \int_0^1 P(x)dx$.

TESTUL 130

Să se determine rangurile matricelor:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **2.** $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $E = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}.$

TESTUL 131

Folosindu-se transformările elementare să se aducă la forma canonică diagonală și să se calculeze rangurile matricelor:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

2. $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$

3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

4. $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 5 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$

5. $E = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

TESTUL 132

Să se verifice dacă următoarele matrice sînt inversabile, și în caz afirmativ să se calculeze inversele:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

5. $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

6. $F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

TESTUL 133

Să se rezolve ecuațiile matriceale:

1. $AX = B$ unde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. $AX = B$ unde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ și

$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$.

3. $AX = B$ unde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ şi

$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

TESTUL 134

Să se rezolve sistemele:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_4 + 5x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (2m+1)x + (m+1)y + 3mz = 1 \\ 3mx + 2my + (4m-1)z = 1; \\ (2m-1)x + (m-2)y + (2m-1)z = m+1 \end{cases}$ $(m \in R)$.

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (\lambda - 3)x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \lambda; \\ -x_1 + (\lambda - 5)x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ $(\lambda \in R)$.

TESTUL 135

Să se discute și să se rezolve sistemele:

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$ unde $\lambda \in R$.

3. $$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 6t = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7t = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 6x - y - 5z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 7x - 3y - 4z = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = \lambda \\ \beta x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda. \end{cases}$$

TESTUL 136

Folosind *algoritmul lui Gauss* să se rezolve sistemele:

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

TESTUL 137

Folosind metoda geometrică să se determine:

1. minimul funcției $f(x, y) = 2x + 3y$, în condițiile:

$$\begin{cases} 6x + y \geq 6 \\ 4x + 3y \geq 2 \\ x + 4y \geq 8 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

2. maximul funcției $f(x, y) = 2x + 3y$ în condițiile:

$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \leq 4 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0, \; y \geq 0. \end{cases}$$

3. maximul funcției $f(x, y) = x - y$ în condițiile:

$$\begin{cases} 1 \leq x + y \leq 2 \\ 2 \leq x - 2y \leq 3 \\ 1 \leq 2x - y \leq 2 \\ x \geq 0, \; y \geq 0. \end{cases}$$

4. minimul funcției $f(x, y) = x + y$ în condițiile:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x + y \leqslant 3 \\ 1 \leqslant x - y \leqslant 0. \end{cases}$$

5. minimul funcției $f(x, y) = 2x + y$ în condițiile:

$$\begin{cases} x - 2y \leqslant 1 \\ 2x - y \leqslant 1 \\ 3x + y \leqslant 0 \\ 2x - y \leqslant 0 \\ 2x - 3y \geqslant 3 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

6. maximul funcției $f(x, y) = x + 2y$ în condițiile:

$$\begin{cases} x - y \leqslant 1 \\ x - 2y \leqslant 1 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

TESTUL 138

1. Folosind metoda geometrică să se determine:
a) minimul funcției $f(x, y) = x - y$, în condițiile:

$$\begin{cases} 6x + y \geqslant 6 \\ 4x + 3y \geqslant 12 \\ x + 4y \geqslant 8 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

b) minimul funcției $f(x, y) = 4x + 3y$ în condițiile de la punctul a)

2. Folosind *metoda simplex*, să se rezolve următoarele probleme de programare liniară.

a) $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leqslant 8 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 16 \\ x_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, 3) \\ \max\ (2x_1 + 6x_2 + 2x_3). \end{cases}$$

b) Să se determine minimul funcției $(fx) = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ cu condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots 6). \end{cases}$$

TESTUL 139

Folosind *metoda simplex* să se rezolve problemele de programare liniară:

1. Să se determine minimul funcției:

$$f = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$$

în condițiile

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ x_3 > 0, \ x_4 > 0. \end{cases}$$

2. Să se determine minimul funcției:

$$f = 2x_1 + x_2$$

în condițiile:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

3. Să se determine maximul funcției:

$$f = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.20. TESTE RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASELOR A XI-A ȘI A XII-A

TESTUL 140

1. Folosind proprietățile determinanților să se calculeze

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$. b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

c) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \dots 1 \\ -1 & x & 1 \dots 1 \\ -1 & -1 & x \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 \dots x \end{vmatrix}$. d) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & x & 1 \dots 1 \\ 1 & 1 & x \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots x \end{vmatrix}$.

2. Să se demonstreze egalitatea:

$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} =$$
$$= 2\sin(a-b)\sin(b-c)\ \sin(c-a).$$

3. Dacă A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi să se arate că:

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

TESTUL 141

1. Fie o matrice $A \in M_{m,n}^{[R]}$. Care este forma matricei B, obținută prin înmulțirea matricei A:
a) la stînga cu o matrice linie.
b) la dreapta cu o matrice coloană.

2. Să se aducă matricele următoare la forma canonică diagonală şi apoi să se determine rangul:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 4 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. Folosind transformările elementare şi lema substituţiei să se calculeze inversele următoarelor matrice:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

e) $E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

TESTUL 142

1. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $$3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} + X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 81 \end{bmatrix}.$$

b) $$X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

TESTUL 143

1. Să se discute sistemele și să se găsească soluțiile atunci cînd acestea există:

a) $$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 5y + 4z = 0 \\ x + 17y + 4z = 0. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5t = 0 \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

c) $\begin{cases} x + y - 3z + 2t = 0 \\ 2x + 3y - z + t = 0 \\ -x + y - z + t = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - 3y + \lambda z = 0; \ \lambda \in R \end{cases}$

2. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} -3x - y + z = -6 \\ 3x + y - z = 6 \\ 9x + 3y - 3z = 18. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ -x - 2y + z = 1 \\ -x - 5y + 4z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ 5x - 4y + z = 11. \end{cases}$

TESTUL 144

1. Să se discute natura sistemelor, după parametrul real λ.

1. $\begin{cases} x + 2y + (\lambda - 3)z = 5 \\ -x + (\lambda - 5)y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = \lambda. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ x + 3y + z = 4 \\ x + (1 - \lambda)y + z = 2 \\ x + 2\lambda y + z = 1 - \lambda. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ 3x + 6y + 9z = 3 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ \lambda x + 2y + 3z = -2 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x - y + \lambda z = 1 - \lambda. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - 3z + 2t = 1 \\ \lambda x + y + (1 - \lambda)z = 3 \end{cases}$

II. Fie polinomul $f \in R[X]$; $f = X^3 - 4X^2 - X + 4$.

Se cere să se dezvolte după puterile lui:

a) $x + 1$

b) $x - 2$

c) $x + 3$.

TESTUL 145

1. În spațiul R^3, vectorul x este exprimat în baza standard: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Pentru fiecare din cazurile de mai jos, se cere să se exprime vectorul x în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$.

a) $x = (1, 2, -1)$; $f_1 = (1, 1, 2)$, $f_2 = (1, 1, -1)$; $f_3 = (1, -1, -3)$.

b) $x = (1, 0, 1)$; $f_1 = (0, -2, 1)$, $f_2 = (1, 0, -2)$, $f_3 = (1, 1, 0)$.

c) $x = (3, 2, -3)$; $f_1 = (0, 0; 1)$, $f_2 = (1, 0, 0)$, $f_3 = (1, 1, 0)$.

d) $x = (1, 2, 3)$; $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (-1, 1, 1)$, $f_3 = (0, 1, 1)$.

2. În spațiul R^2 se consideră sistemele de vectori $\{e_1, e_2\}$ și $\{f_1, f_2\}$, unde $e_1 = (2, \lambda)$, $e_2 = (3, 5)$, $f_1 = (\mu + 3, 2)$, $f_2 = (1, 4)$.

a) Se cere să se determine valorile parametrilor λ și μ astfel ca cele două sisteme să fie baze în R^2.

b) Pentru $\lambda = -3$ și $\mu = 5$ se cer formulele de transformare a coordonatelor prin trecerea de la baza $\{e_1, e_2\}$ la baza $\{f_1, f_2\}$

c) Vectorul $x = (2, -3)$ este exprimat în baza $\{e_1, e_2\}$ pentru $\lambda = -3$. Folosind formulele deduse la punctul b) să se exprime acest vector în baza $\{f_1, f_2\}$ pentru $\mu = 5$.

d) Pentru $\lambda = -3$ și $\mu = 5$ se cer formulele de transformare a coordonatelor prin trecerea de la baza $\{f_1, f_2\}$ la baza $\{e_1, e_2\}$.

e) Vectorul $x = \left(\frac{1}{30}, -\frac{79}{15}\right)$ este exprimat în baza $\{f_1, f_2\}$,cu $\mu = 5$. Se cere, folosind formulele deduse la punctul d) să se scrie acest vector în baza $\{f_1, f_2\}$ (pentru $\lambda = -3$).

TESTUL 146

1. În spațiul R^3, se consideră sistemele de vectori, $\{e_1, e_2, e_3\}$ și $\{f_1, f_2, f_3\}$ unde $e_1 = (1, 1, 2)$, $e_2 = (1, 1, -1)$, $e_3 = (1, -1, -3)$. $f_1 = (0, 0, 1)$, $f_2 = (1, 0, 0)$, $f_3 = (1, 1, 0)$.

a) Să se arate că sistemele respective sînt baze în R^3.

b) Se cer formulele de transformare a coordonatelor prin trecerea de la baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$.

c) Vectorul $x = (1, 1, 1)$ este exprimat în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$. Folosind formulele deduse la punctul b) să se scrie acest vector în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$.

d) Să se găsească formulele de transformare a coordonatelor prin trecerea de la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$.

2. În spațiul R^4 se consideră bazele, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ și $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ unde $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, -1, -1)$, $e_3 = (1, -1, 1, -1)$, $e_4 = (1, -1, -1, 1)$, $f_1 = (1, 3, 1, 2)$, $f_2 = (2, 1, 0, 1)$, $f_3 = (-2, 1, 1, 3)$, $f_4 = (0, 1, 2, 2)$.

a) Se cer formulele de transformare a coordonatelor la trecerea de la baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, la baza $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

b) Vectorul $x = (1, 0, 1, 0)$ este exprimat în baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Se cere să se exprime în baza $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

c) Să se determine formulele de transformare a coordonatelor, cînd se trece de la baza $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Cu ajutorul acestor formule să se verifice rezultatul de la punctul b).

TESTUL 147

1. Fie spațiul vectorial, al polinoamelor $P(t)$, de grad cel mult n, peste corpul numerelor reale.

a) Se consideră transformarea $T_1P(t) = P(t+1) - P(t)$. Se cere să se scrie matricea asociată acestei transformări, luînd bazele $\{1, t \dots t^{n-1}\}$ pentru primul spațiu și $\{1, t \dots t^n\}$ pentru al doilea spațiu.

b) Să se arate că transformarea $T_2[P(t)] = \int_0^t P(s)ds$ este o transformare liniară care aplică polinoamele de grad mai mic sau egal cu n, în mulțimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu $n+1$.

c) Să se determine matricea asociată transformării T_2, considerînd pentru primul spațiu baza $\{1, t, \dots t^{n-1}\}$, iar pentru cel de-al doilea spațiu baza $\{1, t, \dots t^n\}$.

2. În spțiul R^3, se consideră baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ unde e_1 $(1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Se cere să se exprime matricea transformării liniare $T(x) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$ în această bază, știind că:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 \text{ și}$$

$$\eta_1 = 12\xi_1 + 34\xi_2 - 19\xi_3$$

$$\eta_2 = 6\xi_1 + 24\xi_2 - 12\xi_3$$

$$\eta_3 = 18\xi_1 + 58\xi_2 - 31\xi_3.$$

TESTUL 148

1. În spațiul polinoamelor de tipul $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, $a_i \in R$, se aplică transformarea $T[P(t)] = \frac{d}{dt}[(c_1t + c_2)P(t)]$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R$. Este aceasta o transformare liniară?

2. În spațiul $R^{[a, b]}$ al funcțiilor continue pe $[a, b]$ indefinit derivabile se introduc operatorii: $Df = \frac{df}{dx}$ și $If = \int_0^x f(t)dt$. Se cere să se determine operatorii: a) DI, b) ID, c) ID − DI.

3. În spațiul vectorial $P(t)$ al polinoamelor de grad ≤ 2, peste corpul numerelor reale, se cer matricele asociate operatorilor:

a) $TP(t) = \int_{-1}^{1} P(t)dt$; b) $T_1P(t) = (t^2 - 1)P'(t)$;

c) $TP(t) = \int_0^t P(s)\,ds$ considerîndu-se baza $\{1, t-1, (t-1)^2\}$.

I.21. INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

TESTUL 1

1. a) Pentru $m \in R\setminus\{-2\}$ ecuația are rădăcina $x = \frac{4}{m+2}$; pentru $m = -2$ ecuația devine $0 \cdot x = 4$ și nu este verificată pentru nici o valoare reală a lui x. b) Pentru $m \in R\setminus\{0\}$ ecuația are rădăcina $x = 2$, iar pentru $m = 0$ rezultă $x \cdot 0 = 0$ și este adevărată pentru orice număr real x. c) Pentru $m \in R\setminus\{3\} \Rightarrow x = m + 3$. Pentru $m = 3 \Rightarrow x \in R$. d) Ecuația se scrie sub forma echivalentă $(m-1)(m-2)x = m - 1$. e) Pentru $m \in R\setminus\{-2, 0\}$ ecuația are rădăcina $x = \frac{4+m}{2m}$. Este evident că $x \in R\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

2. a) Se pun condițiile: $\begin{cases} 5 - 6x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{5}{6}\right]$.
b) Din condiția $\frac{1-2x}{3x+4} \geq 0$ rezultă că $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right]$.
c) $x \in \left(-3, \frac{1}{3}\right)$.

3. După efectuarea calculelor inecuația se scrie sub forma echivalentă $\frac{4x-8}{x+1} > 0$, de unde rezultă $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

TESTUL 2

1. Se observă că ecuația se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^2+\left(\frac{x+a}{2x+3a}\right)^2+(3x+1)^2=0,\ x\in R\setminus\left\{2,\ -\frac{3a}{2}\right\}.$$

Din faptul că termenii sumei din membrul stîng sînt pozitivi, rezultă că fiecare termen trebuie să fie nul. Prin anularea fiecărui termen rezultă: $x=-\frac{1}{3}$ și $x=-a$, deci ecuația admite rădăcina $x=-\frac{1}{3}$ numai pentru $a=\frac{1}{3}$.

2. a) Se explicitează modulele:

$$|x|=\begin{cases} x \text{ pentru } x\in[0,\ +\infty) \\ -x \text{ pentru } x\in(-\infty,\ 0)\end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 \text{ pentru } x\in[2,\ +\infty) \\ -x+2 \text{ pentru } x\in(-\infty,\ 2)\end{cases};$$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 \text{ pentru } x\in[1,\ +\infty) \\ -x+1 \text{ pentru } x\in(-\infty,\ 1)\end{cases}.$$

Se alcătuiește tabelul:

x	$-\infty$ 0	1	2	$-\infty$
$\|x\|$	$-x$	x	x	x
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$

Pentru $x\in(-\infty,\ 0)$, ecuația devine: $2x=-2\Rightarrow x=-1\in(-\infty,\ 0)$. În cazul, în care $x\in[0,\ 1)$ rezultă $x=-\frac{1}{2}\notin[0,\ 1)$. Pentru $x\in[1,2)$ se obține $x=0\notin[1;\ 2)$,

iar pentru $x \in [2, +\infty)$, ecuația devine $8x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin$ $\notin [2, +\infty)$. Așadar, rădăcina ecuației este $x = -1$. b) Procedînd analog se obține rădăcina $x = -1$. c) Ținînd seama de definiția modulului, rezultă că $|x - 1| = -(x - 1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - 1 \leqslant 0$, adică ecuația este satisfăcută pentru orice $x \in (-\infty, 1]$. d) Cum x trebuie să fie diferit de -1 și ținînd seama de exercițiul precedent rezultă $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1]$.

3. a) Ținînd seama de expresia modulului, inecuația se scrie pentru fiecare din intervalele $(-\infty, 1)$ și $[1, +\infty)$, obținîndu-se în final $x \in \emptyset$. Altfel: se va observa că inecuația se mai scrie sub forma echivalentă $|x - 1| < -(x - 1)$ și pentru $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow -(x - 1) < -(x - 1) \Rightarrow 0 < 0$ iar pentru $x \in [1, +\infty)$ se obține $x < 1$, deci în final $x \in \emptyset$. b) Se poate rezolva explicitînd modulul, și rezultă $x \in [2, 4]$. Altfel: se ține seama că $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$ și atunci inecuația este echivalentă cu sistemul de inecuații simultane:

$$\begin{cases} x - 3 \leqslant 1 \\ x - 3 \geqslant -1 \end{cases}.$$

A treia metodă este metoda grafică. Se reprezintă grafic în raport cu același sistem de axe funcțiile $y_1 = |x - 3|$ și $y_2 = 1$ și se alege intervalul pentru care $y_1 \leqslant y_2$. c) Se scriu inecuațiile pentru fiecare din cazurile $x \in (-\infty, -3)$; $x \in [-3, -1)$; $x \in [-1, +\infty)$ și reunind intervalele obținute rezultă $x \in (-\infty, -1)$.

TESTUL 3

1. α) Dacă $a + b + c = 0$, ținînd seama că $b = -(a + c)$, relațiile lui *Vieta* se scriu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = \frac{c}{a}.$$

Altfel: se observă că dînd lui x valoarea 1 se obține $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și din relația $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ rezultă

a doua rădăcină $x_2 = \frac{c}{a}$. O altă metodă este următoarea: se calculează $\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2$ și prin aplicarea formulei de rezolvare a ecuației de gr. II rezultă $x_{1,2} = \frac{-b \pm (a - c)}{2a} = \begin{cases} x_1 = \frac{c}{a} \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

β) Procedînd analog se obțin rădăcinile $x_1 = -1$ și $x_2 = -\frac{c}{a}$.

2. a) Făcînd notațiile $a = m - 2n + p$, $b = m + n - 2p$ și $c = -2m + n + p$ se observă că $a + b + c = 0$ și conform punctului α) rezultă:

$x_1 = 1$ și $x_2 = \frac{n + p - 2m}{m - 2n + p}$. b) Se observă că $a - b + c = 0$ și conform cazului β) rezultă rădăcinile $x_1 = -1$ și $x_2 = \frac{p(n - m)}{m(n - p)}$. c) Se observă că ecuația mai poate fi scrisă sub forma echivalentă $(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$. d) Schimbînd ordinea factorilor, ecuația se scrie sub forma: $(x + 2)(x - 4)(x + 3)(x - 5) = 44$ sau încă $(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 15) = 44$. Dacă se notează $x^2 - 2x - 8 = y$, atunci $x^2 - 2x - 15 = y - 7$ și ecuația devine $y(y - 7) - 44 = 0$ cu rădăcinile $y_1 = 11$ și $y_2 = -4$. Prin rezolvarea ecuațiilor $x^2 - 2x - 8 = 11$ și $x^2 - 2x - 8 = -4$ mulțimea rădăcinilor ecuației date este: $\{1 + 2\sqrt{5};\ 1 - 2\sqrt{5};\ 1 + \sqrt{5};\ 1 - \sqrt{5}\}$.

3. Se scriu relațiile lui *Viete* pentru ecuația dată: $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1x_2 = q$. Dacă $S = y_1 + y_2$ și $P = y_1y_2$, atunci ecuația în y este: $y^2 - Sy + P = 0$.

a) $S = y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) = -3p$, $P = y_1y_2 = 9x_1x_2 = 9q$ sau se face substituția $x = y/3$ în ecuația în x. b) $S = y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$; $P = y_1y_2 = (x_1x_2)^2 = q^2$. c) $S = x_1 + x_2 + 6$; $P = (x_1 + 3)(x_2 + 3) = x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 =$

$= q - 3p + 9$ (sau se face $x = y - 3$). d) $S = \dfrac{x_1^3 + x_2^2}{x_1 x_2} =$

$$= \frac{p^2 - 2q}{q}; \quad P = 1. \quad \text{e)} \ S = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 \cdot x_2^2} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^2} = \frac{-p^3 + 3qp}{q^2};$$

$$P = y_1y_2 = \frac{1}{q}.$$

TESTUL 4

A. Se pun condițiile: a) $\Delta = 0$, b) $\Delta > 0$,

c) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ p \geqslant 0 \\ S > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ p \geqslant 0 \\ S < 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ p = 1 \end{cases}$ și

rezultă: a) $m = 1$, b) $m \in R \setminus \{1\}$, c) $m \in \emptyset$ d) $m \in (-\infty, 0) \cup \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e) $m = \frac{1}{3}$. f) $m = 1$. **B.** a) Se observă că $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \pm (x_1 + x_2) \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$ și atunci se obține $E_1(m) =$

$$= \pm \frac{1 - 3m}{m} \sqrt{\left(\frac{1 - 3m}{m}\right)^2 - 4\,\frac{2m - 1}{m}} =$$

$$= \pm \frac{(m - 1)(1 - 3m)}{m^2}. \quad \text{b)} \ E_2(m) = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}\right) = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} +$$

$$+ \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} + \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{x_1^2x_2^2},$$

se ține seama ca $x_1 + x_2 = \dfrac{1 - 3m}{m}$ și $x_1x_2 = \dfrac{2m - 1}{m}$.

C. Se elimină m din relaţiile lui *Viete* şi se obţine $x_1x_2 + x_1 + x_2 = -1$.

D. Se studiază semnul discriminantului, produsului, sumei şi se întocmeşte tabelul de mai jos:

m	Δ	P	S	Concluzii
$m \in (-\infty, 0)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_1 \neq x_2$
$m = 0$	+	!	!	Ecuaţia devine $-x - 1 = 0$
$m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$	+	−	+	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; $\lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert$
$m = \frac{1}{3}$	+	−	0	$x_1 x_2 \in R$: $x_1 = -x_2$
$m \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$	+	−	−	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
$m = \frac{1}{2}$	+	0	−	$x_1, x_2 \in R$: $x_1 = 0$; $x_2 < 0$
$m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R$: $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; $x_1 \neq x_2$
$m = 1$	0	+	−	$x_1 = x_2 = -1$
$m \in (1, +\infty)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 < 0$; $x_2 < 0$; $x_1 \neq x_2$

E. Se înlocuieşte $x = 1$ în ecuaţie şi se obţine valoarea $m = +\frac{1}{3}$.

Observaţii. — Rezultatele de la punctul *A* pot fi verificate pe tabelul de la punctul *D*.

— Desigur, nu aţi efectuat toate calculele de mai sus, fiindcă se observă că $a - b + c = 0$ şi conform exerciţiului 1 punctul β) din testul 3 rezultă că $x_1 = -1$ şi $x_2 = \frac{1 - 2m}{m}$.

TESTUL 5

1. a) *Metoda I*. Se poate folosi tabelul de mai jos.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Metoda a II-a. Se știe că disjuncția propozițiilor „$s \vee t$" are valoare de adevăr „0" atunci și numai atunci cînd ambele propoziții au valoarea de adevăr „0". Dar propozițiile p, $\neg p$ nu pot fi simultan false.

b) *Metoda I*. Se știe că implicația „$s \to t$" este falsă atunci și numai atunci cînd s este adevărată și t este falsă, în celelalte cazuri fiind adevărată. Presupunem că implicația are valoarea de adevăr „0" și atunci rezultă că $(p \to q)$ este adevărată și $(p \to p)$ este falsă; dar $(p \to p)$ este totdeauna adevărată. Deci propoziția compusă nu poate avea niciodată valoarea de adevăr „0".

Metoda a II-a. Folosind definiția implicației $s \to t \equiv \equiv (\neg s) \vee t$, propoziția compusă din enunț se poate scrie: $(p \to q) \to (p \to p) \equiv \neg(p \to q) \vee (p \to p) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee \vee p) = 1$ (conform punctului a).

Metoda a III-a. Se poate folosi tabela de adevăr dată mai jos:

p	q	$p \to q$	$p \to p$	$(p \to q) \to (p \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

2. a) *Metoda I*. Se poate folosi tabelul de adevăr. *Metoda a II-a*. Conjuncția propozițiilor s și t este adevărată atunci și numai atunci cînd propozițiile s și t sînt simultan adevărate. Dar p, $\neg p$ nu pot fi simultan adevărate.

b) *Metoda I*. Ținînd cont că $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge q$, propoziția compusă mai poate fi scrisă: $p \wedge \neg(p \vee q) \equiv p \wedge (\neg p \wedge$

$\wedge \neg q) \equiv (p \wedge \neg p) \wedge q$. Cum propoziția $p \wedge \neg p$ are valoarea de adevăr „0" rezultă că și conjuncția ei cu orice altă propoziție. va avea întotdeauna valoarea de adevăr „0".

Metoda a II-a. Se poate folosi tabela de adevăr dată mai jos:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \wedge \neg(p \vee q)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

c) *Metoda I*. Avînd în vedere proprietatea conectorului „non" propoziția se mai poate scrie: $\neg[p \vee (\neg p)] \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p) \equiv$ $\equiv \neg p \wedge p$.

Metoda a II-a. Conform punctului 1. a) propoziția $q =$ $= p \vee (\neg p)$ are valoarea de adevăr „1", indiferent de valorile de adevăr ale propoziției p. Rezultă că $\neg q$ va avea valoarea de adevăr „0" oricare ar fi valoarea de adevăr a propoziției p.

Metoda a III-a. Se apelează la tabela de adevăr.

TESTUL 6

1. Considerînd toate situațiile posibile privind valorile de adevăr ale propozițiilor p, q, r tabela de adevăr a propoziției compuse S arată astfel:

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	S
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2. a) „1"; „0"; „0"; „1"; „1". b)α) „1". β) „0". γ) „0". δ) „1". **3.** a) „1" (într-adevăr există $x = 0$). b) „0", c) „0". d) „0" (reprezintă „non" propoziția de la punctul a). e) „1" (negația propoziției de la punctul c). f) „1".

TESTUL 7

1. I. α) 0; β) 1; γ) 1; δ) 1; η) 1; θ) 0. II. α) $\rceil[(\exists x)p(x)] \equiv (\forall x) \rceil p(x)$; β) $\rceil[(\forall x) q(x)] \equiv (\exists x) \rceil q(x)$; γ) $\rceil[(\exists x)(\exists y) p(x, y)] \equiv (\forall x)\rceil[(\exists y)p(x, y)] \equiv (\forall x)(\forall y)\rceil p(x, y)$. **2.** p fals, $\rceil p$ adevărat și $\rceil p$ este „Există un număr natural care are cifra unităților 4 și nu este divizibil cu 4"; q fals, și $\rceil q$ adevărat, r adevărat și $\rceil r$ fals, s fals și $\rceil s$ adevărat. **3.** Se va ține cont de II. α). **4.** $\rceil p(x, y)$: „$x \neq -1 \wedge y \neq 3$"; $\rceil q(x, y)$: „$x \geq 2 \vee y = 3$"; $\rceil s(x)$: „$x \neq 1 \wedge x \neq 4$"; $\rceil t(x)$: „$x \in \left[5\frac{1}{2};\ +\infty\right)$". **5.** „0".

TESTUL 8

2. $M_1 = \{-2, -1\}$; $M_2 = \{-2, -1, 1\}$. **3.** a) „0", b) „0", c) „1", d) „0" e) „0", f) „1" g) „1" h) „1". **4.** a) $A = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. $B = \{2, 4, 6\}$. $D = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$. b) α) „0"; β) „1"; γ) „0"; δ) „1"; η) „1"; σ) „0".

TESTUL 9

1. a) $M_1 \cap M_2 = (2, 3)$. b) $M_1 \cup M_2 = [-1, \infty)$. c) $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$. d) R. **2.** a) $M_1 = \{-1, 0, 2, 3\}$. b) $M_2 = \{0, 2, 3\}$. **3.** a) $M = \{1, a, b\}$. b) Submulțimile lui M sînt: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{1, a\}$, $\{1, b\}$, $\{a, b\}$, $\{1, a, b\}$ c). α) $A \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$. γ) $A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. **4.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. **5.** a) $\complement_E A = \{4, 6\}$; b) $\complement_E B = \{3, 4, 6\}$; c) $\complement_A B = \{3\}$; d) $\complement_E(\complement_E A) = A$; e) $\complement_E(\complement_E B = B$; f) $\complement_E(\complement_A B) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.

TESTUL 10

1. $\neg p_1 \equiv x \notin A \cup B \equiv \neg[x \in A \cup B] \equiv \neg[x \in A \vee x \in B] \equiv \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \equiv x \notin A \wedge x \notin B$". $\neg p_2 \equiv \neg[x \in A \cap B] \equiv x \notin A \vee x \notin B$. $\neg p_3 \equiv \neg(x \in A - B) \equiv x \notin A \vee x \in B$. $\neg p_5 \equiv \neg[(x, y) = (x', y')] \equiv x \neq x' \vee y \neq y'$. $\neg p_6 \equiv x \notin A \vee x \notin B$. **2.** $A = \{1, 4\}$. $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ și $C = \{4, 9\}$ sau $A = \{4, 9\}$; $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$; $C = \{1, 4\}$ sau $A = \{1, 4, 9\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ și $C = \{4\}$. **3.** Două mulțimi M și N sînt egale atunci și numai atunci cînd $M \subset N$ și $N \subset M$. Fie $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \Leftrightarrow [x \in A \setminus B] \wedge [x \in A \setminus C] \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$. **4.** $M_1 = \complement_A B$; $M_2 = \complement_A D$; $M_3 = \complement_B D$; $M_4 = \complement_A(\complement_A B)$; $M_5 = \complement_A(\complement_A D)$.

TESTUL 11

1. a) Pentru exemplificare au fost date diagramele a șase dintre ele în figurile 1, 2, 3, 4, 5, 6, b) Tabelele de valori asociate diagramelor sînt:

x	1	2	3
$f_1(x)$	a	b	c

;

x	1	2	3
$f_2(x)$	b	a	c

x	1	2	3
$f_3(x)$	c	a	b

;

x	1	2	3
$f_4(x)$	b	a	b

x	1	2	3
$f_5(x)$	b	b	b

;

x	1	2	3
$f_6(x)$	a	a	a

.

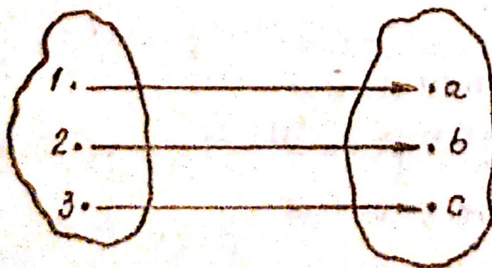


Fig. 1

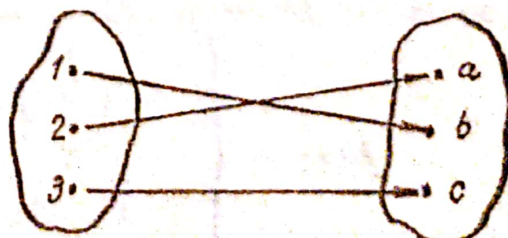


Fig. 2

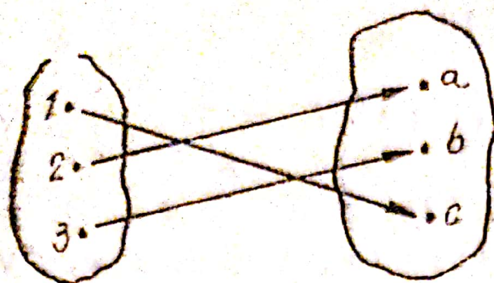


Fig. 3

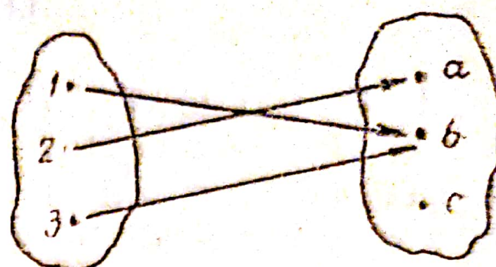


Fig. 4

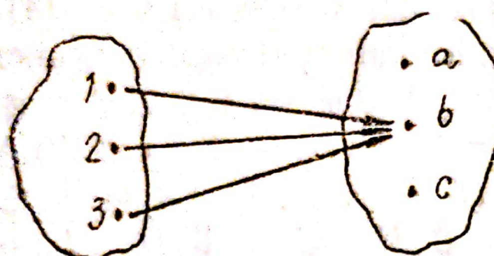


Fig. 5

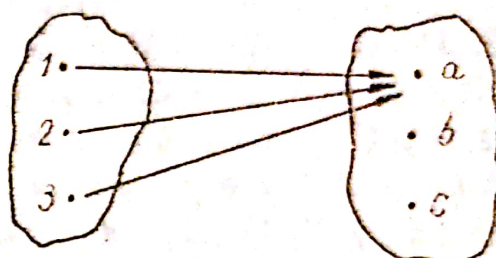


Fig. 6

2. Funcțiile asociate sînt: $f : I_1 \rightarrow I_2$; $f(x) = 2x + 1$ și $g : I_2 \rightarrow I_1$; $g(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. **3.** Cum definirea unei funcții presupune corespondența f, domeniul de definiție și domeniul valorilor atunci se pot asocia expresiei date, spre exemplu funcțiile:

$$f_1 : R \rightarrow R,\ f_1(x) = \frac{x}{x^2+1};\ f_2 : \{-3, 2, 3\} \rightarrow \left\{-\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}\right\};$$

$$f_2(x) = \frac{x}{x^2+1};\ f_3 : [2, 4] \rightarrow \left[\frac{4}{17}, \frac{2}{5}\right],\ f_3(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

4. Se știe că dacă domeniul de definiție poate fi scris ca o reuniune de mulțimi disjuncte, deci o funcție poate fi definită prin mai multe expresii. Spre exemplificare vor fi date două funcții și se recomandă cititorului să propună alte funcții.

Fie $f_1 : R \rightarrow R$ definită astfel:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } x \in (-\infty, 0] \\ -1 + 2x & \text{pentru } x \in (0, 2) \\ \dfrac{x}{1 - 5x} & \text{pentru } x = 2 \\ x^5 + 7x - 12 & \text{pentru } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Fie $f_2 : R \to R$ definită astfel:

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-5x} & \text{dacă } x(-\infty, -1] \cup \left(0, \dfrac{1}{5}\right) \\ -1+2x & \text{dacă } x \in (-1, 0] \cup (1, 2] \\ x^3 + 7x - 12 & \text{dacă } x \in \left[\dfrac{1}{5}, 1\right] \cup [10, +\infty) \\ x^2 & \text{dacă } x \in (2, 10). \end{cases}$$

5. $f(0) = \dfrac{2}{3}$; $f(4) = \dfrac{16}{65}$; $f(-5) = 6$; $f(1) = -2$; $f(-2) = 4$; $f(3) = -2$; **6.** Se observă că $5,79853 \in [5, 6]$, atunci $f(5,79853) = 8$ și cum $18\,970 \in (6, +\infty)$ rezultă că $f(183\,970) = 10$. **7.** a). Pentru ca relația să aibă sens trebuie ca $x^2 - 1 \neq 0$, deci $f : R \setminus \{-1, 1\} \to R$ sau se mai poate scrie: $f : (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) \to R$. b) $f : R \to R$. c) $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 7\}$. d) $f : R \to [0, +\infty)$.

TESTUL 12

1. Fie funcțiile $f : A \to B$ și $g : M \to N$. Spunem că $f = g$ atunci și numai atunci cînd: $A = M$, $B = N$ și $(\forall a)$ „a" din domeniul de definiție $\Rightarrow f(a) = g(a)$. Se observă că nici una din perechile de funcții nu sînt egale. Justificarea este imediată dacă se are în vedere definiția de mai sus. **2.** Impunînd condițiile care rezultă din definiție se obține: $a = 0$, $b = 1$, $n = m = 1$. **3.** Cum $f(y) = ay + b$ și $f(z) = az + b$ prin calcule succesive se obține: $\dfrac{f(y) + f(z)}{2} =$

$$= \frac{ay + b + az + b}{2} = \frac{a(y+z) + 2b}{2} = a\left(\frac{y+z}{2}\right) + b =$$

$= f\left(\dfrac{y+z}{2}\right)$ sau se poate calcula începînd cu membrul drept al egalității: $f\left(\dfrac{y+z}{2}\right) = a\left(\dfrac{y+z}{2}\right) + b = \dfrac{ay + bz + 2b}{2} =$

$$= \frac{f(y) + f(z)}{2}.$$

4. Un punct $M(a, b)$ aparține graficului G_f al funcției $f:A \to B$, atunci și numai atunci cînd $b = f(a)$, $(\forall)a \in A$ (de exemplu $C_2 \notin G_h$). **6.** b) Pentru că $g(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$; trebuie impusă condiția ca $x - 1 \neq 0$. Deci restricția funcției f (care este egală cu funcția g) este definită pe $R \setminus \{1\}$.

TESTUL 13

Pentru funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ se ține seama de axioma **I**, de incidență: „prin două puncte distincte trece o singură dreaptă". Graficele sînt trasate respectiv în figurile 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

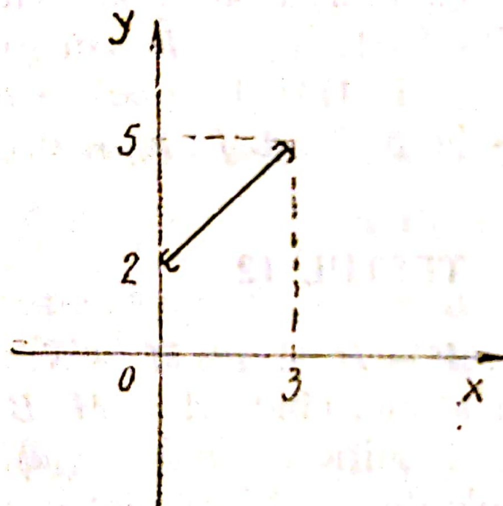


Fig. 7

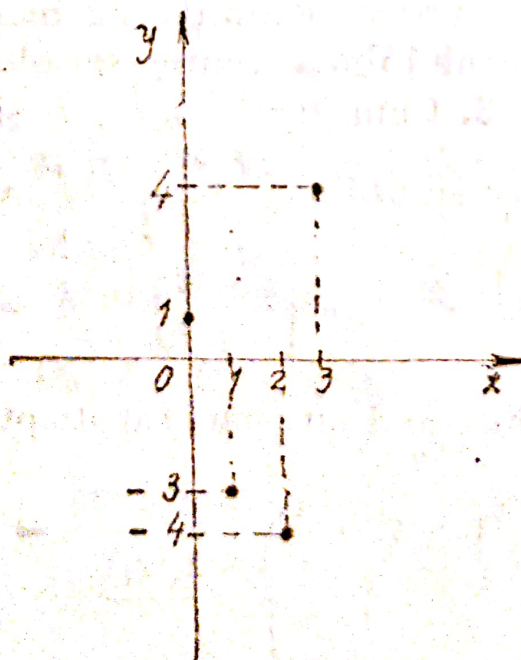


Fig. 8

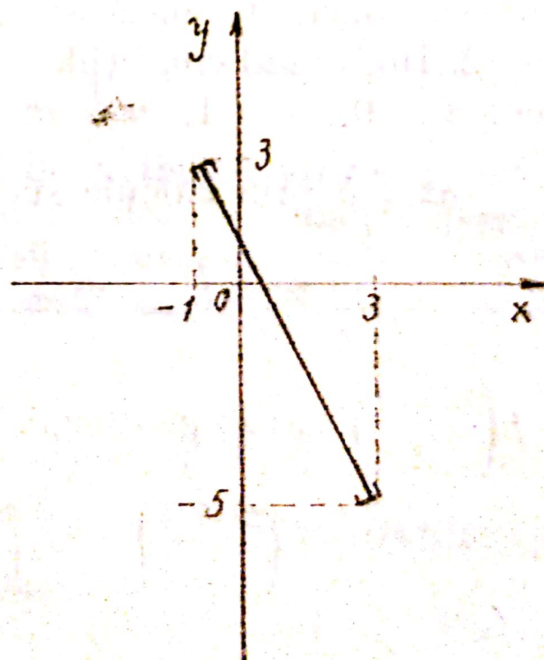


Fig. 9

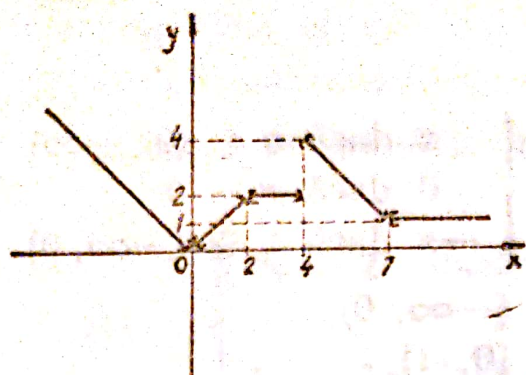


Fig. 10

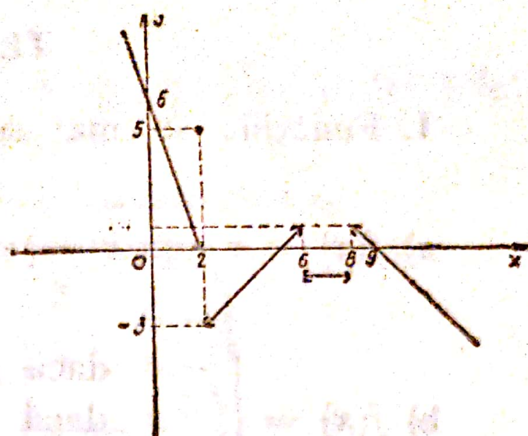


Fig. 11

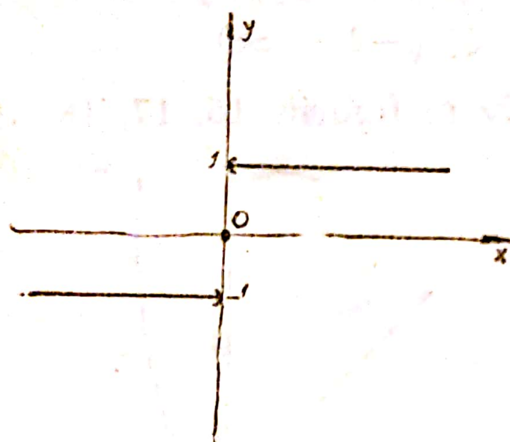


Fig. 12

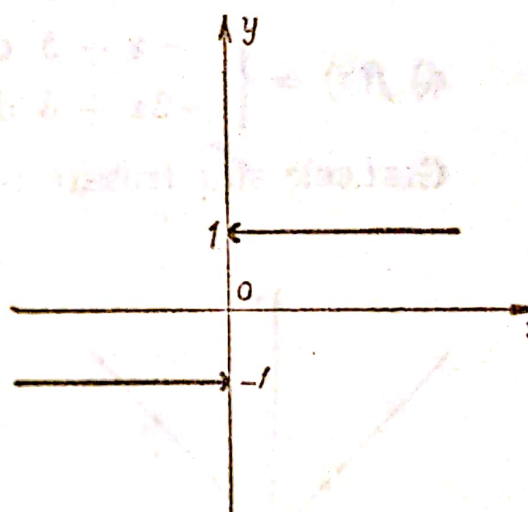


Fig. 13

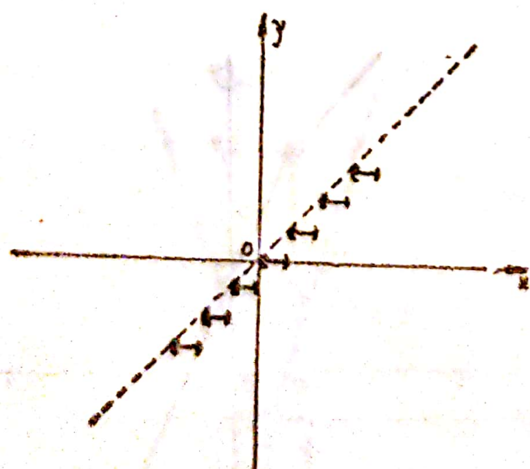


Fig. 14

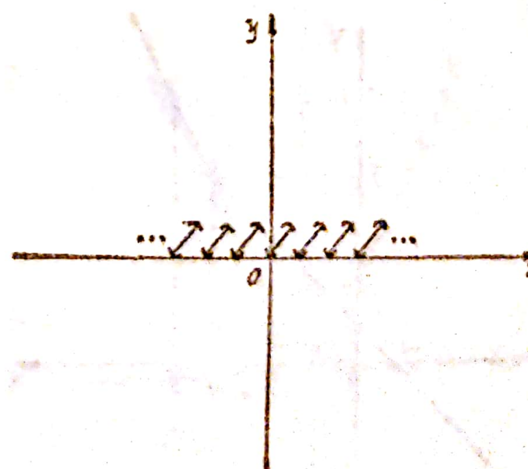


Fig. 15

TESTUL 14

1. Funcțiile se mai scriu:

a) $f(x) = x \operatorname{sign} x = |x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x \in (0, +\infty) \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ -x \text{ dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \\ x \text{ dacă } x \in [0, 1) \\ x^2 \text{ dacă } x \in [1, +\infty). \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, +4] \\ 2x - 3 \text{ pentru } x \in (4, +\infty). \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x + 5 \text{ dacă } x \in (-\infty, -2] \\ -2x + 3 \text{ dacă } x \in (-2, +\infty). \end{cases}$

Graficele sînt trasate respectiv în figurile 16, 17, 18, 19.

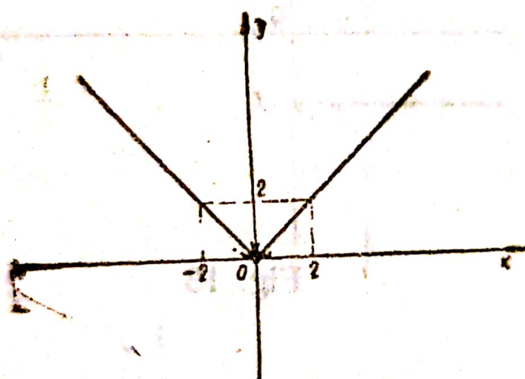


Fig. 16

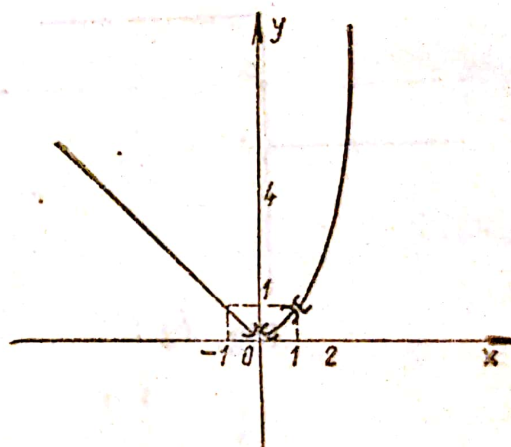


Fig. 17

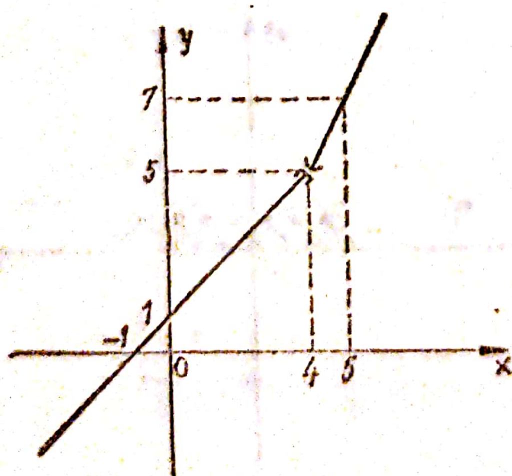


Fig. 18

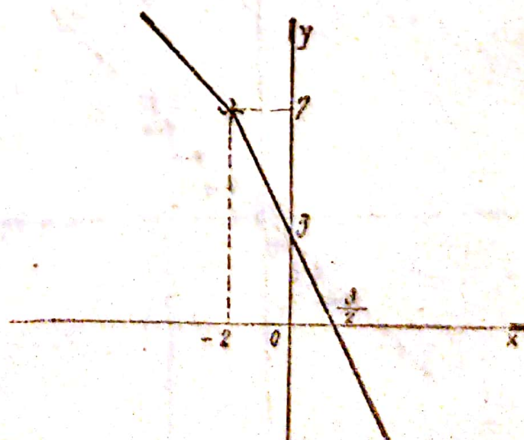


Fig. 19

2. Relația a) este echivalentă cu relația c), iar relația b) este echivalentă cu relația d).

3. Folosind definiția funcției modul scriem:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{dacă } x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right) \\ 2 - 3x & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right). \end{cases}$$

(graficul este redat în figura 20, iar porțiunea hașurată răspunde punctului b).

4. Funcțiile se mai scriu:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 2 & \text{dacă } x \in [-1, 1) \\ 2x & \text{dacă } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0, +\infty). \\ -2x & \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Graficele sînt trasate în figurile 21, 22, 23.

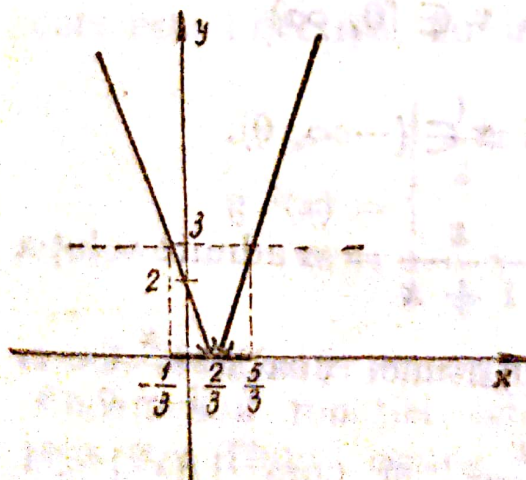


Fig. 20

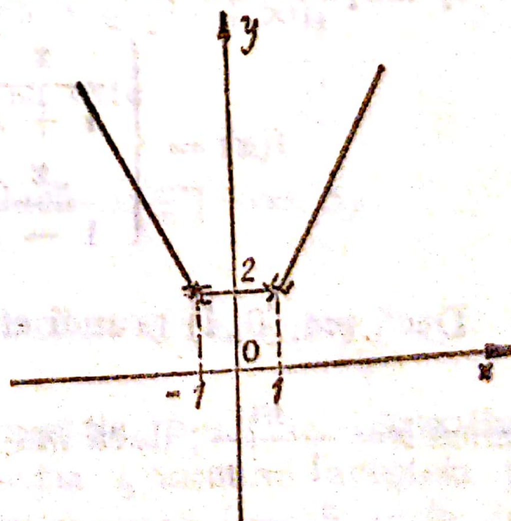


Fig. 21

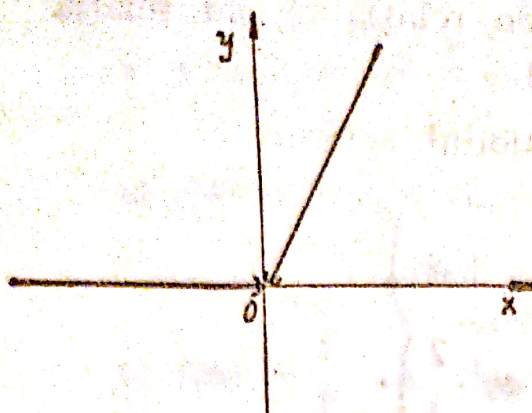


Fig. 22

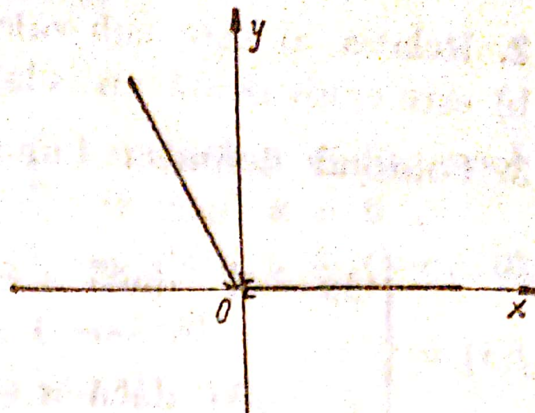


Fig. 23

TESTUL 15

1. a) Funcția este surjectivă dacă ecuația cu necunoscuta x, $\frac{1-x}{1+x}=\alpha$, are soluție pentru orice $\alpha \in R\setminus\{-1\}$. Ecuația se scrie: $x(1+\alpha)=1-\alpha \Rightarrow x=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$. Deci oricare ar fi $\alpha \in R\setminus\{-1\}$ există $x \in R\setminus\{1\}$ astfel încît $f(x)=\alpha$. Funcția este injectivă atunci și numai atunci cînd $f(x_1)=f(x_2)$ implică $x_1=x_2$. Din $\frac{1-x_1}{1+x_1}=\frac{1-x_2}{1+x_2} \Rightarrow x_1=x_2$. Funcția inversă este $f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}$, adică $f(x)=f^{-1}(x)$.

b) Se aplică aceeași metodă ca mai sus.

c) Explicitînd modulul, funcția se scrie:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & \text{dacă } x\in[0,\infty)\\[2mm] \dfrac{x}{1-x} & \text{dacă } x\in(-\infty,0).\end{cases}$$

Dacă $m\in[0,1)$ atunci ecuația $\frac{x}{1+x}=m$ admite soluția unică $x=\frac{m}{1-m}$; dacă $m\in(-1,0)$ atunci ecuația $\frac{x}{1-x}=m$ admite soluția unică $x=\frac{m}{m+1}$, și cum $|f(x)|<1$

şi $(-1, 1) \subset f(R) \Rightarrow f(R) = (-1, 1)$, adică funcţia este surjectivă. Fie $0 \leqslant x_1 < x_2$ fixaţi $\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{(1 + x_1)(1 + x_2)} < 0$ deci funcţia este injectivă pe $[0, +\infty)$. Analog se arată că este injectivă pe $(-\infty, 0)$ (sau se observă că $f(-x) = -f(x)$ şi atunci graficul este simetric faţă de originea axelor). Funcţia fiind bijectivă atunci există funcţia inversă:

$$f^{-1}:(-1, 1) \to R,\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{pentru } x \in (-1, 0). \end{cases}$$

adică $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$.

2. a) Se notează $1 + \dfrac{2}{x-1} = t$ şi atunci $x = \dfrac{t+1}{t-1}$ pentru $t \in R \setminus \{1\}$.

Introducînd în $f\left(1 + \dfrac{2}{1-x}\right)$ pe $x = \dfrac{t+1}{t-1}$ şi revenind la notaţia în x se obţine:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, +1) \cup (1, 3) \\ 3x - 4 & \text{dacă } x \in [3, +\infty), \text{ deci} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, 3) \\ 3x - 4 & \text{dacă } x \in [3, +\infty); \end{cases}$$

care este bijectivă, iar inversa sa este

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & \text{dacă } x \in (-\infty, 5) \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3} & \text{dacă } x \in [5, +\infty) \end{cases}$$

3. Mai întîi se reprezintă grafic funcţiile respective. Codomeniul funcţiei este proiecţia graficului acesteia pe axa Oy. Ţinînd seama de definiţia unei funcţii surjective

rezultă că: „funcția este surjectivă dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului taie graficul funcției în cel puțin un punct". Iar din definiția funcției injective rezultă: „funcția este injectivă dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului taie graficul funcției în cel mult un punct."

În concluzie: „funcția este bijectivă dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului taie graficul său într-un punct și numai în unul".

Graficele sînt trasate în figurile 24, 25, 26, 27; porțiunile îngroșate pe axa Oy reprezintă codomeniile funcțiilor. Ținînd seama de cele de mai sus rezultă că funcția de la punctul a) și funcția de la punctul d) sînt bijective; funcția de la punctul b) este numai surjectivă ,iar funcția de la punctul c) nu este nici surjectivă și nici injectivă.

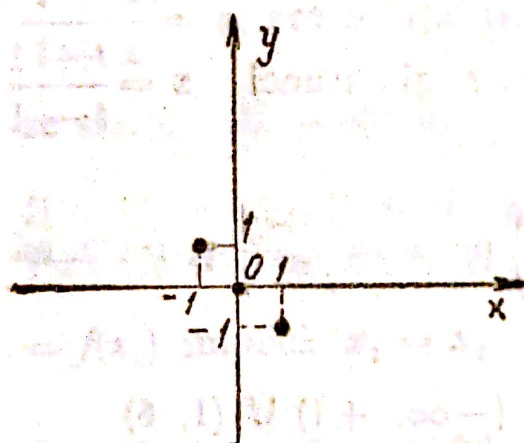


Fig. 24

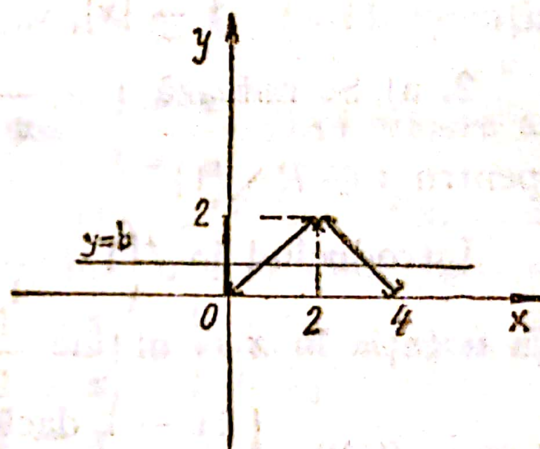


Fig. 25

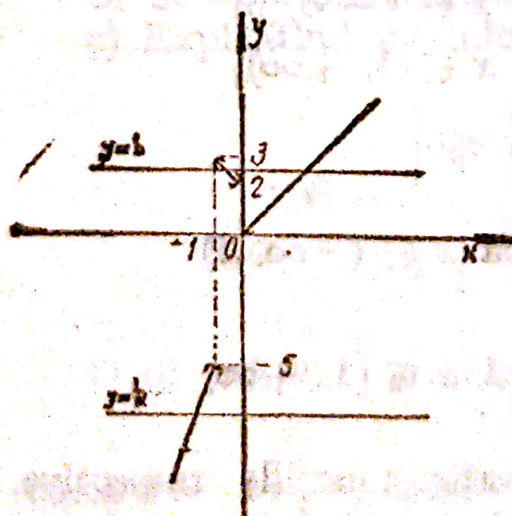


Fig. 26

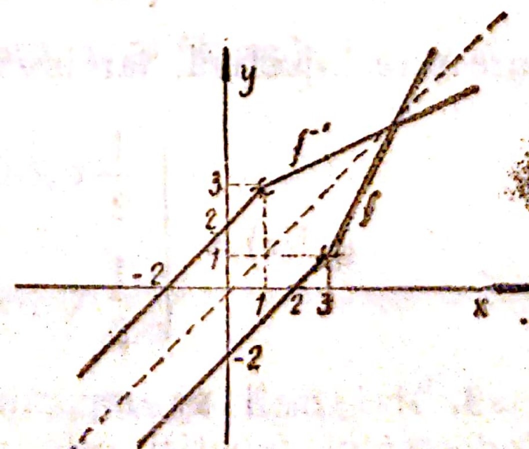


Fig. 27

TESTUL 16

1. Transcriem funcțiile f și g specificîndu-le și codomeniile, astfel:

$$f \begin{cases} [0, \infty) \xrightarrow{f_1(x) = x} [0, \infty) \\ (-\infty, 0) \xrightarrow{f_2(x) = 1-x} (1, \infty) \end{cases}$$

$$(-\infty, \infty) \xrightarrow{g(x) = x^2} [0, \infty)$$

Pentru a putea defini funcția compusă $f \circ g$ este necesar ca domeniul de definiție al funcției f, să includă sau să fie egal cu codomeniul funcției g. În cazul de față $[0, \infty) \subseteq [0, \infty)$ și atunci avem: $(f \circ g)_{(x)} = (f_1 \circ g)_{(x)} = f_1(g(x)) = g(x) = x^2$. Se observă că și funcția $g \circ f$ poate să fie definită. Există posibilitățile:

pentru $x \in [0, \infty) \Rightarrow (g \circ f)_{(x)} = (g \circ f_1)_{(x)} = g(f_1(x)) =$
$= [f_1(x)]^2 = g(x) = x^2.$

pentru $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow (g \circ f)_x = (g \circ f_2)_{(x)} = g(f_2(x)) =$
$= [f_2(x)]^2 = g(1 - x) = (1 - x)^2.$

$$\text{Deci } g \circ f = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ (1 - x^2) & \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Analog se obțin $f \circ f$ și $g \circ g$. Avem: $(f \circ f)_{(x)} = f(f(x)) = f(x)$;

$$(g o g)(x) = g(g(x)) = g(x^2) = [g(x)]^2 = x^4.$$

2. Funcțiile sînt:

$$\{-2, -1, 3, 4\} \xrightarrow{f(x) = x^2 - 2x + 3} \{6, 11\}$$

$$\{-3, 6, 11\} \xrightarrow{g(x) = x - 2} \{-5, 4, 9\}.$$

Se observă că domeniul funcției g include codomeniul funcției f și se poate vorbi doar de $g \circ f$. Deci $(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) =$
$= f(x) - 2 = g(x^2 - 2x + 3) = (x - 1)^2.$

Redăm în figura 28 diagrama lui $g \circ f$.

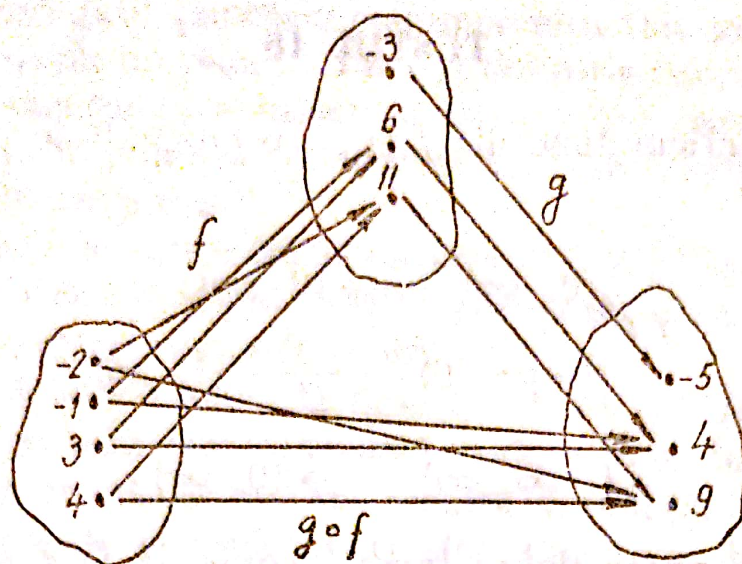


Fig. 28

3. b) Funcțiile date sînt:

$$f \begin{cases} (-\infty,\ 1] \xrightarrow{f_1(x) = 2x^2 + 1} [1,\ \infty). \\ (1,\ \infty) \xrightarrow{f_2(x) = x - 1} (0,\ \infty) \end{cases}$$

$$g \begin{cases} (-\infty,\ 0] \xrightarrow{g_1(x) = x + 2} (-\infty,\ 2] \\ (0,\ \infty) \xrightarrow{g_2(x) = 3x} (0.\ \infty). \end{cases}$$

Deoarece codomeniile lui g_1 și g_2 nu se includ (așa cum sînt date) în nici unul din domeniile lui f_1 și f_2, este necesar să se scrie codomeniile lui g_1 și g_2 ca reuniuni de intervale. Corespunzător se va avea în vedere ca și domeniile de definiție ale lui g_1 și g_2 să fie scrise ca reuniuni de intervale. Deci:

$$g \begin{cases} (-\infty,\ -1] \cup (-1,\ 0] \xrightarrow{g_1(x) = x + 2} (-\infty,\ 1] \cup (1,\ 2] \\ \left(0,\ \dfrac{1}{3}\right] \cup \left(\dfrac{1}{3},\ \infty\right) \xrightarrow{g_2(x) = 3x} (0,\ 1] \cup (1,\ \infty). \end{cases}$$

Se disting cazurile:

α) $x \in (-\infty,\ -1]$, $(f \circ g)_{(x)} = (f_1 \circ g_1)_{(x)} = f_1(g_1(x)) = 2x^2 + 8x + 9$

β) $x \in (-1,\ 0]$, $(f \circ g)_{(x)} = (f_2 \circ g_1)_{(x)} = f_2(g_1(x)) = x + 1$

γ) $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$, $(f \circ g)(x) = (f_1 \circ g_2)(x) = f_1(g_2(x)) = 18x^2 + 1$

δ) $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, $(f \circ g)(x) = (f_2 \circ g_2)(x) = f_2(g_2)(x) = 3x - 1$

$$\Rightarrow f \circ g = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 9 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ x + 1 & \text{dacă } x \in (-1, 0] \\ 18x^2 + 1 & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \\ 3x - 1 & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right). \end{cases}$$

Pentru $g \circ f$ avem cazurile:

θ) $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g_2 \circ f_1)(x) = g_2(f_1(x)) = 6x^2 + 3$

ε) $x \in (1, \infty) \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g_2 \circ f_2)(x) = 3x - 3$

$$\Rightarrow g \circ f = \begin{cases} 6x^2 + 3 & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \\ 3x - 3 & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

4. Se notează cu: A = {cetățeni români}, B = {localități în R.S. România}, C = {coduri localități}.

Aplicațiile $f : A \to B$ și $g : B \to C$ constituie funcții întrucît oricărui cetățean român (născut pe teritoriul R.S. România) îi corespunde o localitate natală și oricărei localități îi corespunde un cod. De exemplu: „Cetățeanul Ion Gogoașă (I.G.) s-a născut în Vîrtoapele, județul Teleorman (V.T.) care are codul poștal „0684". Rezultă: f(„I.G.") = „V.T." și g(„V.T.") = „0684".

a) Funcția f este surjectivă (într-o localitate din R.S. România s-a născut cel puțin un cetățean român).

b) Funcția f nu este injectivă (există cel puțin doi cetățeni români născuți în aceeași localitate).

c) Funcția g este bijectivă (orice cod este propriu unei localități și la două localități diferite corespund două coduri diferite).

d) „$g \circ f$" este aplicația prin care „fiecărui cetățean român i se asociază codul localității natale".

5. a) Presupunem că f nu este injectivă $\Rightarrow (\exists)x_1 \in A$; $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (g \circ f)_{(x_1)} = (g \circ f)_{(x_2)}$ ceea ce contrazice că $g \circ f$ este injectivă.

b) Dacă g nu ar fi surjectivă $\Rightarrow (\exists)\ y \in C$, $(\forall)\ x \in B$; $y \neq g(x)$. Deoarece $(\forall)x \in A$, $f(x) \in B \Rightarrow g(f(x)) \neq y$, Deci $(g \circ f)_{(x)} \neq y$, adică $g \circ f$ nu este surjectivă ceea ce contrazice ipoteza. Deci g este surjectivă.

TESTUL 17

1. Prin notația „a/b" înțelegem că „a divide pe b". Presupunem că ar exista fracția ireductibilă $\frac{p}{q}$ al cărei pătrat să fie $3 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3 \Rightarrow p^2 = 3q^2 \Rightarrow 3/p^2 \Rightarrow 3/p$. Dacă 3 divide pe p, rezultă că există un întreg p' astfel ca $p = 3p'$. Din $p^2 = 3q^2 \Rightarrow (3p')^2 = 3q^2 \Rightarrow 3p'^2 = q^2 \Rightarrow 3/q^2 \Rightarrow 3/q$, deci $(\exists)q'$ astfel ca $q = 3q'$. Din $p = 3p'$ și $q = 3q'$ rezultă că fracția $\frac{p}{q} = \frac{3p'}{3q'} = \frac{p'}{q'}$, adică este reductibilă ceea ce contrazice presupunerea că $\frac{p}{q}$ ireductibilă.

2. Presupunem că „$p \to q$" are valoarea de adevăr „0", ceea ce se întîmplă atunci cînd p adevărat și q fals. Dacă presupunem că fracția $\frac{ak+b}{ck+d} = \frac{A \cdot r}{A \cdot t}$ unde $A \neq \pm 1$; $r \in Z$, $t \in Z$ atunci $ad - bc = A(at - cr)$. Dar cum propoziția p este adevărată, din relația $ad - bc = \pm 1 \Rightarrow at - cr = \frac{\pm 1}{A}$.
S-a ajuns la o contradicție fiindcă membrul stîng reprezintă un număr întreg, iar membrul drept un număr rațional ($A \neq$ $\neq \pm 1$). Deci „$p \to q$" este adevărată.

4. Numărul $a = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ este irațional. Dacă presupunem că $a \in Q \Rightarrow a^2 = 18 + 75 + 30\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6} =$ $= \frac{a^2 - 93}{30}$. Se obține o contradicție căci membrul drept

este un număr rațional, pe cînd membrul stîng al egalității conform punctului 1 din acest test este irațional. Redăm tabloul completat:

Numărul	N	Z	Q	$R \setminus Q$	R
$\frac{1}{2}$	nu	nu	da	nu	da
$3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$	nu	nu	nu	da	da
$\sqrt{6,25}$	nu	nu	da	nu	da
$-1,7$	nu	nu	da	nu	da
$12,5(13)$	nu	nu	da	nu	da
$\sqrt{1,44} + \sqrt{\frac{3}{4}}$	nu	nu	nu	da	da
1,1010010001...	nu	nu	nu	da	da
4,123156079840...	nu	nu	nu	da	da
$a + b\sqrt{3}$; $a \in Q$; $b \in Q \setminus \{0\}$	nu	nu	nu	da	da
$\sqrt{2}(\sqrt{2} - 3)$	nu	nu	nu	da	da

TESTUL 18

1. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu: $n < \frac{1}{q} \leqslant n + 1$.

2. Fie cele trei numere naturale consecutive $n - 1$, n, $n + 1$ $(n > 1)$. În final se obține: $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3n^2 - 1}{(n-1) \cdot (n+1)}$ Dar $3 / (n-1)(n+1) \cdot n$ și nu divide pe $(3n^2 - 1)$; pentru $n = 2p$, $6/n(n-1)(n+1)$ și nu divide pe $3n^2 - 1$; pentru $n = 2p + 1$, $8 / n(n-1)(n+1)$ și numai $4/3n^2 + 1$. Deci fracția ireductibilă conține factorii 2 și 3.

3. Notînd cu S expresia avem:

$$S = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2} =$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

a) $S > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} < 1 \Leftrightarrow n > 3.$

În ceea ce privește răspunsurile la b, c, d, e se va ține cont de punctul 2.

4. Fie $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ cele două fracții ireductibile cu proprietatea: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$. Fie $b \in N$, $d \in N \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1 \Leftrightarrow ad + bc = bd \Leftrightarrow ad = b(d - c) \Rightarrow d/b(d - c)$. Dar $\frac{c}{d}$ fiind ireductibilă (d, $d - c$ sînt numere prime) $\Rightarrow d/b$. Analog se arată că b/d și cum $b \in N$, $d \in N \Rightarrow b = d$. Fie $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = n$; $a, b, c, d, n \in N \Rightarrow ad + bc = nbd \Rightarrow b/ad$. Deoarece a și b sînt prime între ele rezultă b/d. Analog rezultă d/b.

TESTUL 19

1. a) $f(x) = (x + 1)^2$. b) $f(x) = -(x - 1)^2$.

c) $f(x) = x^2 + 1$; d) $f(x) = -x^2 + (-4)$.

e) $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. f) $f(x) = -(x - 1)^2 + (-3)$.

g) $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right)$.

h) $f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)$.

2. Fiind dată $f(x) = ax^2 + bx + c$, mai întîi se scrie sub forma canonică, adică $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ și apoi în etape se trece la reprezentarea geometrică a graficului funcției date. *Etapa I*: se reprezintă graficul funcției $g(x) = ax^2$. *Etapa a II-a*: se efectuează o translație a reprezentării obținute în etapa I de-a lungul axei Oy cu $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$. *Etapa a III-a*: din poziția obținută în etapa a II-a se efectuează o translație paralelă cu axa Ox cu $x_0 = -\frac{b}{2a}$, care poziție constituie tocmai reprezentarea geometrică a funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$. Punctul de coordonate $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$ reprezintă coordonatele vîrfului parabolei, iar dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$ reprezentă ecuația axei de simetrie a parabolei. Spre exemplificare, să reprezentăm geometric graficul funcției de gradul doi, $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. Se scrie:

$$f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)$$

Etapa I: prin puncte reprezentăm graficul funcției $g(x) = -x^2$. *Etapa a II-a*: translatăm parabola obținută în etapa I cu $y_0 = +\frac{1}{4}$, obținînd astfel graficul funcției $h(x) = -x^2 + \frac{1}{4}$. *Etapa a III-a*. Efectuăm o translație paralelă cu axa Ox cu $x_0 = +\frac{3}{2}$ a graficului obținut la etapa a II-a. Se observă că reprezentarea geometrică obținută este o parabolă avînd ca vîrf punctul de coordonate $\left(+\frac{3}{2}, +\frac{1}{4}\right)$ și axa de simetrie dreapta de ecuație $x = +\frac{3}{2}$. În figura 29 sînt trasate

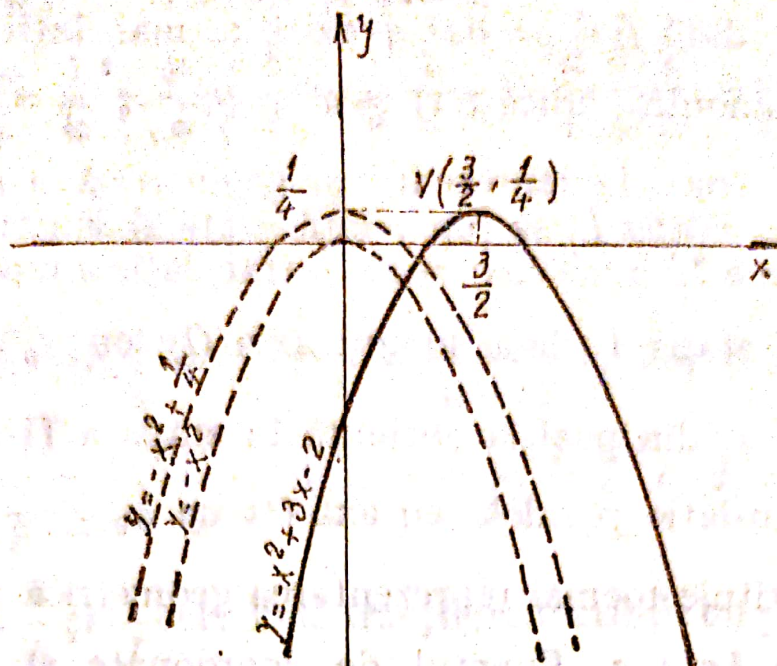


Fig. 29

punctat graficele funcțiilor de la etapele I și II, iar cu linie plină este trasat graficul funcției $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

9. Se observă că funcțiile nu sînt injective.

TESTUL 20

I. a) Se pune condiția ca $m > 0$. b) Condiția este $m < 0$, c) Graficele nu intersectează axa Ox dacă ecuația $f(x) = 0$ nu are rădăcini reale. Deci se pune condiția ca $\Delta < 0$, adică $1 - m < 0 \Rightarrow m \in (1, \infty)$. d) Graficele sînt tangente axei Ox (taie axa Ox în două puncte confundate), dacă ecuația $f(x) = 0$ are rădăcini egale. Așadar, se pune condiția ca $\Delta = 0 \Rightarrow m = 1$. e) Ecuația $f(x) = 0$, trebuie să aibă rădăcini reale și diferite, deci $\Delta > 0$. f) Pentru ca graficele să fie deasupra axei Ox, [adică $mx^2 + 2(m-1)x + m - 1 > 0$, $(\forall)\ x \in R$] se pun condițiile: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m > 0 \end{cases}$. g) Trebuie ca $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m < 0 \end{cases}$. h) Trebuie ca vîrful parabolei să aibă abscisa egală cu zero și cum $x_v = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = 0$, adică $m - 1 = 0$.

II. Trebuie arătat că există un punct (ale cărui coordonate sînt independente de m), prin care trec toate parabolele. Se scrie $f_m(x) = m(x+1)^2 - 2x - 1$ și apoi se anulează coeficientul lui m. Rezultă $x = -1$ și $f(-1) = 1$, deci punctul este $A(-1, 1)$.

III. 1. Se scriu coordonatele vîrfului $\begin{cases} x = \dfrac{1-m}{m} \\ y = \dfrac{m-1}{m} \end{cases}$ și se elimină m, obținîndu-se $y + x = 0$. 2. p_1 „0"; p_2 „1"; p_3 „1"; p_4 „0"; p_5 „1"; p_6 „1"; p_7 „1"; p_8 „1".

TESTUL 21

1. Se pun condițiile: α) $\begin{cases} f(2) = 3 \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ f(0) = 1 \\ a > 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ f(0) = 9 \\ f(1) = 10 \\ a > 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} a < 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4} \\ f(0) = -1 \end{cases}$.

2. $Gf = \{(0, 1), (1, 2), (2, 5), (3, 10)\}$.

3. $f: \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right] \to \left[-\dfrac{1}{4}, \infty\right)$.

TESTUL 22

1. a), b) Se alcătuiește tabloul:

x	$-\infty$		-2		0		2		3		7		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x^2 - 10x + 21$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$E(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Atunci: $E(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, 3] \cup [7, +\infty)$ și $E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-, -2) \cup (0, 2) \cup (3, 7)$. Nu s-a introdus în tabel și $x^2 + x + 1$ fiindcă acesta este pozitiv oricare ar fi x real. c) $x \in (-5, 2) \cup [3, 4) \cup (5, \infty)$. d) $x \in (\infty, -5) \cup (2, 3) \cup (4, 5)$. e) $x \in (-1, 1) \cup (2, 3)$.

f) *Metoda I.* Se scrie succesiv: $(x-1)^2(x-4)^2 - (x-1)^2(x-6)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-4-x+6)(x-4+x-6) \geqslant 0 \Leftrightarrow (2x-10) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [5, +\infty)$.

Metoda a II-a. Se descompune în produs de sumă prin diferență. g) Se obține: $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$. **2.** a) $x \in (-\infty, -5] \cup (3, \infty)$.

b) $x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup (2, \infty)$. c) Soluția se obține intersectînd intervalele: $I_1 = (-\infty, 1) \cup (2, 3] \cup (4, +\infty)$; $I_2 = (-2, 1) \cup (2, +\infty)$; $I_3 = (-2, 0] \cup \left[\dfrac{2}{3}, 1\right) \cup (2, +\infty)$.

Se obține în final $x \in (-2, 0] \cup \left[\dfrac{2}{3}, 1\right) \cup (2, 3) \cup (4, \infty)$.

d) $x \in (1, \sqrt{5}) \cup (3, 2\sqrt{3})$.

TESTUL 23

1. Se scriu funcțiile sub formă explicită:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 1 - x^2 & \text{pentru } x \in (-1, 1) \end{cases}$

(figura 30).

Altfel: vezi testul 40, exercițiul 4.

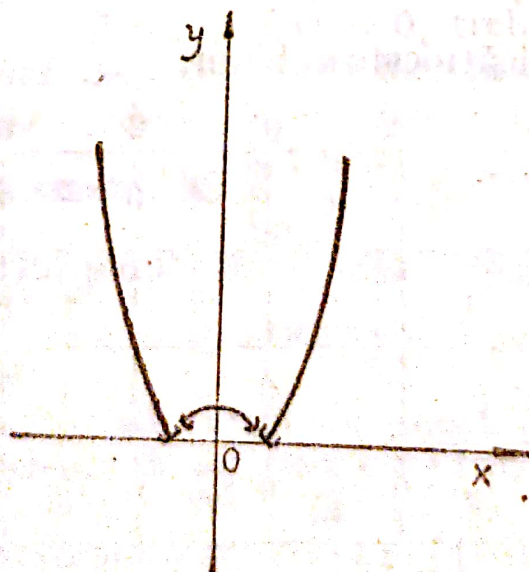


Fig. 30

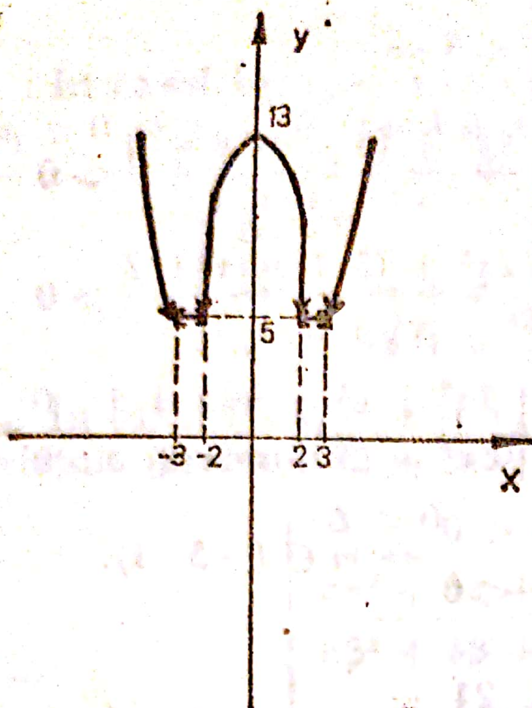


Fig. 31

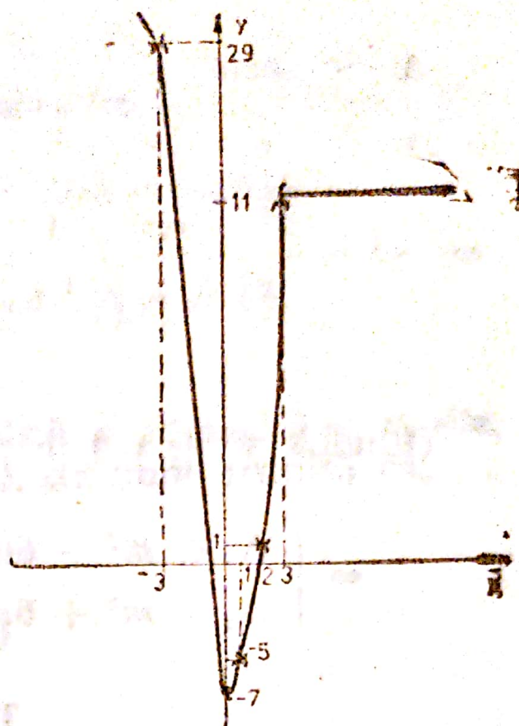


Fig. 32

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 13 \text{ pentru } x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \\ 5 \text{ pentru } x \in [-3, -2] \cup [2, 3] \\ 13 - 2x^2 \text{ pentru } x \in (-2, 2) \end{cases}$ (figura 31).

c) $f(x) = \begin{cases} -6x + 11 \text{ dacă } x \in (-\infty, -3) \\ 2x^2 - 6x - 7 \text{ dacă } x \in [-3, 0) \\ 2x^2 - 7 \text{ dacă } x \in [0, 1) \cup [2, 3) \\ 6x - 11 \text{ dacă } x \in [1, 2) \\ 11 \text{ dacă } x \in [3, +\infty) \end{cases}$ (figura 32).

2. a) $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. b) $x \in R$. **3.** a) *Metoda I.* Se explicitează modulul și se consideră fiecare caz în parte. *Metoda a II-a.* Ținînd seamă că $|a| \leqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant b \\ a \geqslant -b, \end{cases}$ rezultă că inecuația propusă este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x} < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x^2-1}{x^2-3x} > \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{33}}{6}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{33}}{6}\right).$$

b) $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

4. Se scrie: $\left|\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -3 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x^2 + (3 - m)x + 4}{x^2 + x + 1} > 0 \\ \frac{2x^2 + (3 + m)x + 2}{x^2 + x + 1} > 0 \end{cases}$$

(fiindcă $x^2 + x + 1 > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (3 - m)x + 4 > 0 \\ 2x^2 + (3 + m)x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 6m - 55 < 0 \\ \Delta_2 = m^2 + 6m - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-5, 1).$$

TESTUL 24

1. *Metoda I.* Notînd cu x_1 și x_2 punctele de intersecție cu axa Ox, adică rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, se poate proceda astfel: pentru a), b), f) și g) se face substituția $y = \frac{x - \alpha}{x - \beta}$ adică $x = \frac{\beta y - \alpha}{y - 1}$ și se obține: (1) $f(y) = (a\beta^2 + b\beta + c)y^2 - (2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c)y + (a\alpha^2 + b\alpha + c)$. Cum, $\Delta = (b^2 - 4ac)(\alpha - \beta)^2$ rezultă că rădăcinile ecuației $f(y) = 0$, sînt reale pentru aceleași valori pentru care sînt reale rădăcinile ecuației $f(x) = 0$. Dacă se notează cu y_1 și y_2 rădăcinile ecuației $f(y) = 0$ atunci avem: (2) $y_1 = \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta}$ și $y_2 = \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta}$.

În cazul a) $\alpha < x_1 < x_2 < \beta \Rightarrow y_1 < 0$ și $y_2 < 0$, adică ecuația $f(y) = 0$, are rădăcinile negative; rezultă în final condițiile:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a\beta^2 + b\beta + c} > 0 \\ \frac{2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c}{a\beta^2 + b\beta + c} < 0 \end{cases}$$

(adică $y_1 y_2 > 0$ și $y_1 + y_2 < 0$).

În cazul b), $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$, din relațiile (2) rezultă că: $y_1 > 0$ și $y_2 < 0$ (fiindcă $x_1 - \alpha < 0$ și $x_1 - \beta < 0$, $x_2 - \alpha > 0$ și $x_2 - \beta < 0$), de unde rezultă condițiile:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a\beta^2 + b\beta + c} < 0 \end{cases} \quad \text{(adică } y_1 y_2 < 0\text{).}$$

În cazul f), $x_1 < \alpha$ și $x_2 > \beta$ adică $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ din relațiile (2) rezultă: $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, de unde rezultă că,

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a\beta^2 + b\beta + c} > 0 \\ \dfrac{2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c}{a\beta^2 + b\beta + c} > 0. \end{cases}$$

În cazul g) avem aceleași condiții finale ca în cazul b).

Pentru punctele c), d) și e) se face substituția $x = y + \alpha \Rightarrow f(y) = ay^2 + (2a\alpha + b)y + a\alpha^2 + b\alpha + c$. Se notează cu y_1 și y_2 rădăcinile ecuației $f(y) = 0$. Se observă că ecuațiile $f(x) = 0$ și $f(y) = 0$ au în același timp rădăcinile reale.

În plus avem: $y_1 = x_1 - \alpha$ și $y_2 = x_2 - \alpha$. În cazul d) $x_1 < x_2 < \alpha$ rezultă că: $y_1 < 0$ și $y_2 < 0$, deci se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a} > 0 \\ \dfrac{2a\alpha + b}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{(adică } y_1 y_2 > 0 \text{ și } y_1 + y_2 < 0\text{).}$$

În cazul e) $\alpha < x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 = x_1 - \alpha > 0$ și $y_2 = x_2 - \alpha > 0$, deci:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{2a\alpha + b}{a} < 0 \\ \dfrac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{(adică } y_1 y_2 > 0 \text{ și } y_1 + y_2 > 0\text{).}$$

În cazul c) $x_1 < \alpha < x_2 \Rightarrow y_1 = x_1 - \alpha < 0$ și $y_2 = x_2 - \alpha > 0$, deci avem condițiile: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a} < 0. \end{cases}$

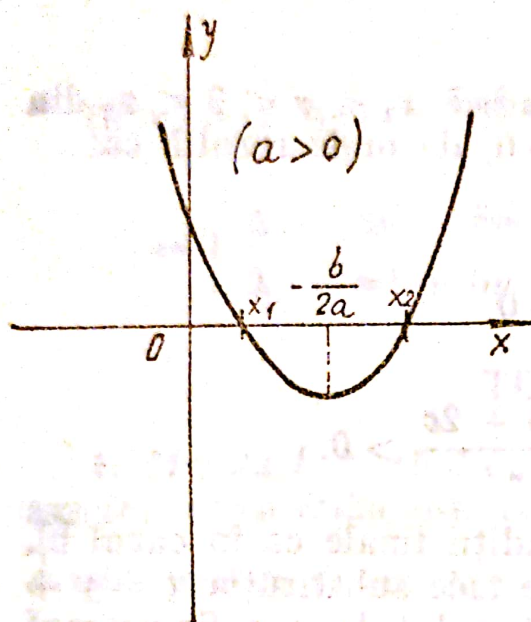


Fig. 33

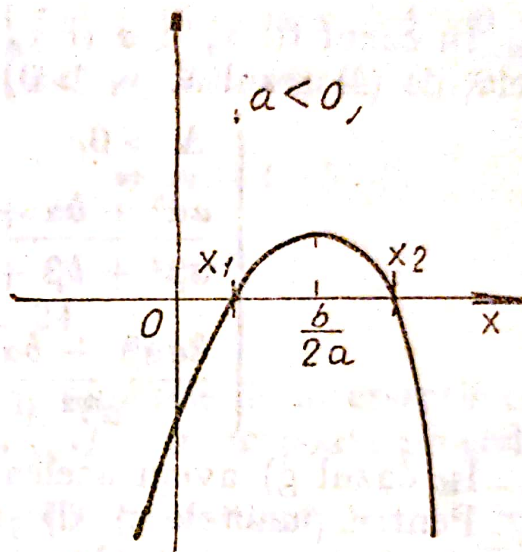


Fig. 34

Metoda a II-a. Ținînd seama de graficul funcției de gradul doi în cazul cînd taie axa Ox în două puncte distincte (figurile 33 și 34), se figurează pe axa Ox punctele α și β avînd pozițiile cerute respectiv la punctele a) — e). Rezultă condițiile:

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \beta \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \alpha. \end{cases}$ e) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > \alpha. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0. \end{cases}$ g) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) < 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$

2. În exercițiul de mai sus se înlocuiesc: p) $\alpha = 0$ și $\beta = 1$ (cazul a). q) $\beta = 0$, $\alpha = 1$ (cazul f). r) $\alpha = 1$ (cazul e). s) $\alpha = 2$ (cazul d) t) $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (cazul g). Se poate folosi una din metodele expuse.

TESTUL 25

1. Se pun condițiile:

a) $\Delta \leqslant 0.$ b) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ m - 2 > 0. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ m \leqslant 0. \end{cases}$

2. a) Relația se mai scrie:

$\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2(x_1x_2)^2$ și înlocuind $x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m-2}$ și $x_1x_2 = \dfrac{2m-3}{m-2}$ rezultă o ecuație în m, a cărei soluție răspunde problemei puse. b) $m = 4$ c) Inecuația $f(x) > 0 \Leftrightarrow (m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 > 0$ nu are soluție dacă $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 \leqslant 0$ oricare ar fi $x \in R$. Deci se pun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ m - 2 < 0. \end{cases}$$

d) Funcția este: $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ -(x+1)^2 & \text{dacă } x \in [-1, +\infty) \end{cases}$

3. În final rezultă condiția $b = -a$, de unde $f(x) = ax^2 - ax + c$. **4.** a) $m \in (0, 4)$. b) $m \in \Phi$. c) $m \in (0, 3)$.

TESTUL 26

Sistemele au soluțiile:

1. (2, 8); (8, 2). **2.** (0, 0); (—3, 4); $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$.
3. (1, —2); (—2, 1). **4.** (3, 1); (1, 3); (—3, —1); (—1, —3). **5.** (1, 1). **6.** (—1, —1); (1, 1). **7.** (1, 1, 2); (2, 1, 1); (1, 2, 1).
8. $\left(a, \frac{a(b-1+\sqrt{b^2-2b-3})}{2}, \frac{a(b-1-\sqrt{b^2-2b-3})}{2}\right)$ etc. (sistemul este simetric). **9.** (2, 1); (1, 2). **10.** $x \in R - \{0\}$, $y \in R \setminus \{0\}$, $z \in R \setminus \{0\}$;

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\frac{1}{y}} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\frac{1}{z}} \Rightarrow x = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{a}};$$

$$y = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{b}}; \quad z = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{c}}.$$

11. (0, 0); $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$; $(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{19}, -\sqrt{19})$; $(\sqrt{19}, \sqrt{19})$; (—2, 3); (3, —2); (—3, 2); (2, —3). **12.** (1, 3); (3, 1).

TESTUL 27

1. Se știe că funcția $f: A \to B$, A mulțime simetrică, este pară dacă $(\forall)\ x \in A$, are loc relația $f(-x) = f(x)$. Se observă că intervalul $[-1, 3]$ nu este simetric, fiindcă există $x \in [-1, 3]$, astfel ca $-x \notin [-1, 3]$.

p_2: Se disting cazurile: I) $0 \leq x_1 < x_2$, II) $x_1 < x_2 \leq 0$ și III) $x_1 < 0 \leq x_2$. De exemplu, în cazul I, $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4) < 0$ deci $f(x_1) < f(x_2)$.

p_3: Propoziția are valoarea de adevăr „0", fiindcă pe intervalul $(-\infty, 0]$, restricția funcției este strict descrescătoare, iar pe intervalul $[0, +\infty)$ este strict crescătoare.

p_4: Propoziția are valoarea de adevăr „1".

p_5: Propoziția are valoarea de adevăr „0".

p_5: Propoziția are valoarea de adevăr „0".

p_6: Propoziția are valoarea de adevăr „1".

2. a) Funcției $f(x) = x^5$ i se asociază tabelul de valori:

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		0		1		2		3		4		$+\infty$
$f(x)=x^5$	$-\infty$	↗	-1024	↗	-324	↗	-32	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	32	↗	324	↗	1024	↗	$+\infty$

Unind printr-o linie continuă, punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel, se obține graficul funcției din figura 35. c) Se translatează graficul funcției $f(x) = x^5$ din figura 35. de-a lungul axei Oy cu cantitatea -1, și se obține graficul funcției $f(x) = x^5 - 1$. d) Se translatează graficul funcției $f(x) = x^5$ din figura 35 de-a lungul axei Ox cu cantitatea $+1$, și se obține graficul funcției $f(x) = (x-1)^5$. e) Graficul funcției $f(x) = |x^5|$ se află deasupra axei Ox și se obține din graficul funcției $f(x) = x^5$ trasînd în locul curbei de sub axa Ox simetricul său față de această axă. (vezi figura 36). k) Funcției date i se asociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	$+\infty$
$f(x)=x^{-5}$	0 ↘	$-\frac{1}{10^5}$ ↘	$-\frac{1}{32}$ ↘	-1 ↘	-32 ↘	-10^5 ↘	|	↘ 10^5 ↘	32 ↘	1 ↘	$\frac{1}{32}$ ↘	$\frac{1}{10^5}$	↘

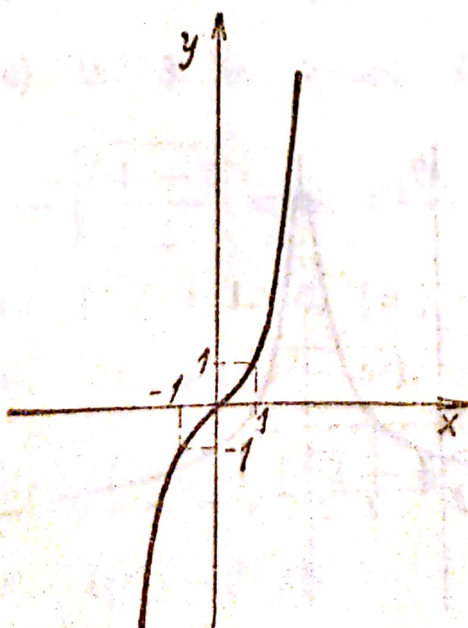


Fig. 35

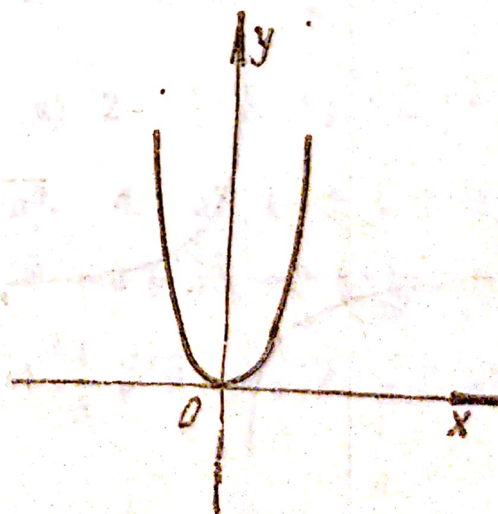


Fig. 36

Observație: în dreptul lui $x = 0$ s-a tras o bară verticală întrucît funcția nu este definită.

Prin puncte se trasează apoi graficul din figura 37. l) Se translatează graficul funcției $f(x) = x^{-5}$, (figura 37) de-a lungul axei Oy, cu cantitatea $+1$ (figura 38). n) Se translatează graficul funcției $f(x) = x^{-1}$ (obținut la punctul *m*) de-a lungul axei Ox cu cantitatea $+2$ (figura 39). p) Graficul este trasat în figura 40.

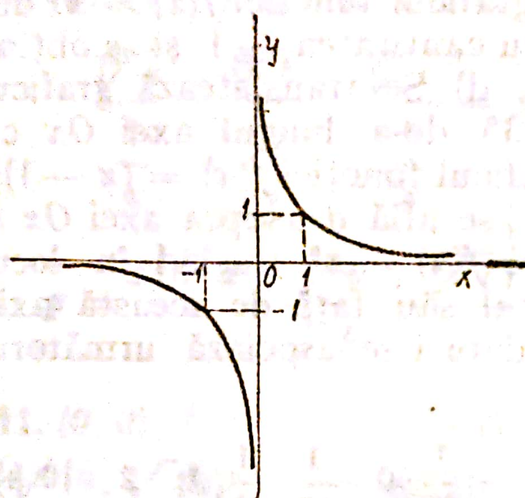


Fig. 37

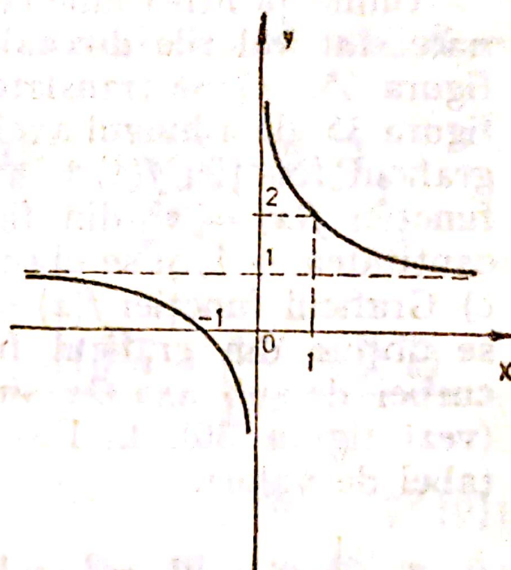


Fig. 38

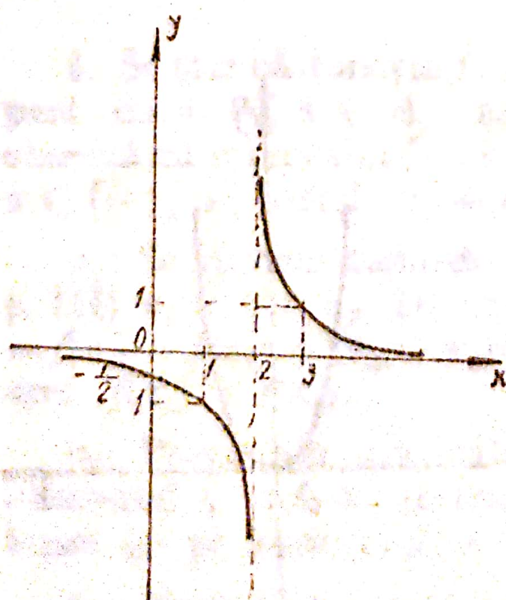


Fig. 39

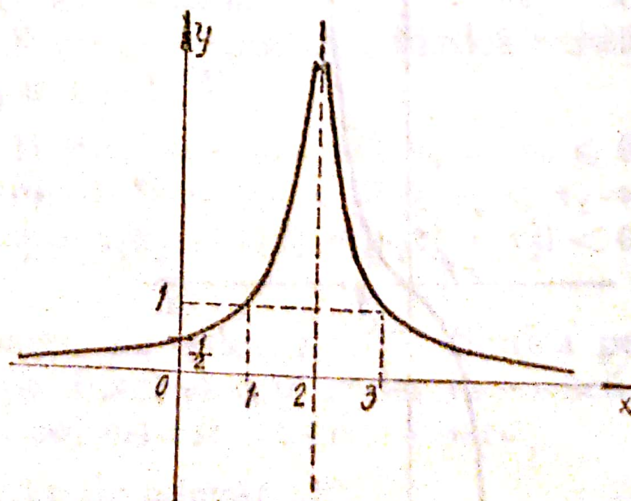


Fig. 40

3. a) $\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$.

b) $\left[a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)-2x^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)=a^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}$.

c) a^4-1.

TESTUL 28

1. a) Da. $f_1^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$; $f_1^{-1}(x)=x^4$. $f_2^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$; $f_2^{-1}(x)=x^5$.

2. Funcțiile se mai scriu:

a) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1 \text{ dacă } x\in(0,\infty)\\ -1 \text{ dacă } x\in(-\infty,0)\end{cases}$

(vezi testul nr. 13). b) $f(x)=|x|-x$ (vezi testul 14). c) $f(x)=|x-1|-|x+1|$. d) $f(x)=|x^2-3x+2|$.

3. a) R. b) R. c) $[-3, 3]$. d) $(-\infty, 1]$. e) $[1, 4]$. f) R.

TESTUL 29

1. a) $3\sqrt[7]{3}$; $(-2)^8$; $\frac{1}{3}\sqrt{6}$. b) $\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)^2}$; $\sqrt[3]{x^2-x-1}$. c) $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[3]{2}$. **2.** a) $-13\sqrt{3}$. b) $2(a-b)\sqrt[4]{ab}$ c) 0. **3.** Se aplică formula: $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A+C}{2}}-$ $-\sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$ unde $C^2=A^2-B$. a) $2-\sqrt{3}$. b) $5-\sqrt{3}$. c) $\sqrt{2}+1$. d) $|a|-\sqrt{3-a^2}$. **4.** a) $(-2+\sqrt{3})$. b) $\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})$. c) $\frac{1}{12}(5\sqrt{6}-2\sqrt{15}+3\sqrt{10})-1$ d) $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)$. e) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$. f) $\frac{1}{3}(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})$.

TESTUL 30

1. Raționalizînd numitorii termenilor, expresia se mai scrie:

$$1+\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\ldots+$$

$$+\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{n-1-n}=1-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+$$

$$+\sqrt{4}\ldots-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}=\sqrt{n}.$$

2. a) $\dfrac{(n+\sqrt{p})^2+2(n+\sqrt{p})}{n(n-1)+\sqrt{p}\,(n-1)}=\dfrac{n+\sqrt{p}+2}{n-1}$.

b) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$. c) $2\sqrt{x}$. d) Substituind în expresia dată: n^3-3n-2 cu $(n-2)\cdot(n+1)^2$ și n^3-3n+2 cu $(n+2)(n-1)^2$, se obține $\dfrac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}$ (Expresia are sens pentru $n>2$). e) $\dfrac{|2x+y|-|2x-y|}{|x+2y|-|x-2y|}$ etc.

3. Se impune condiția: $8x^2-(m-1)x+m-7>0$ $(\forall)\ x\in R\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow(m-1)^2-32(m-7)<0\Rightarrow x\in(9,\ 25)$.

TESTUL 31

1. a) Ținînd cont că $\sqrt{(a+2)^2}=|a+2|$ și $\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|$ expresia devine:

$$E(a)=\begin{cases}-\dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}} & \text{dacă } a\in(-\infty,\ -2)\\[2mm] \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+4}} & \text{dacă } a\in[-2,\ 2]\\[2mm] \dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}} & \text{dacă } a\in(2,\ \infty).\end{cases}$$

b) Cum $1 + x^2 = \dfrac{(a+b)^3}{a(a^2+3b^2)}$ şi $1 - x^2 = \dfrac{(a-b)^3}{a(a^2+3b^2)}$ rezultă că $E(a, b) = \dfrac{b}{a}$. c) $E = 22$. d) Se calculează mai întîi:

$$\sqrt{x-1} = \frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+2}}; \quad \sqrt{y+1} = \frac{|a-2|}{\sqrt{a^2+2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(a) = \begin{cases} 2a-3 & \text{dacă } a \in (-\infty) \cup [2, \infty) \\ \dfrac{1}{2a-3} & \text{dacă } a \in [1, 2) \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}. \end{cases}$$

2. a) Funcţia este strict crescătoare şi bijectivă. I se asociază tabelul de valori:

x	$-\infty$		-3^5		-32		-1		0		$\frac{1}{32}$		1		32		$+\infty$
$fx = \sqrt[5]{x}$	$-\infty$	↗	-3	↗	-2	↗	-1	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	2	↗	$+\infty$

iar graficul este redat în figura 41. b) Graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$ se obţine din graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[5]{x}$, printr-o translaţie cu cantitatea $b = -1$ de-a lungul axei Oy (figura 42). c) Graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$ se obţine translatînd graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[5]{x}$ de-a lungul axei Ox, cu cantitatea $a = 1$ (figura 43).

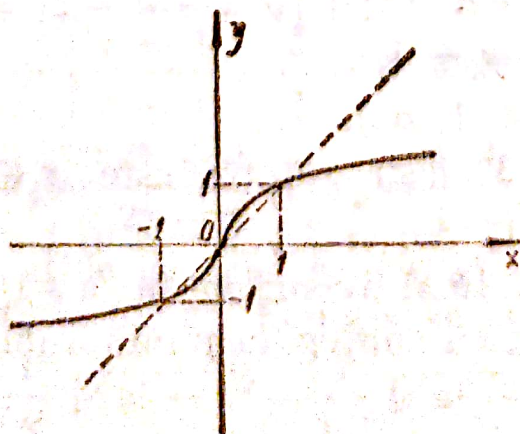


Fig. 41

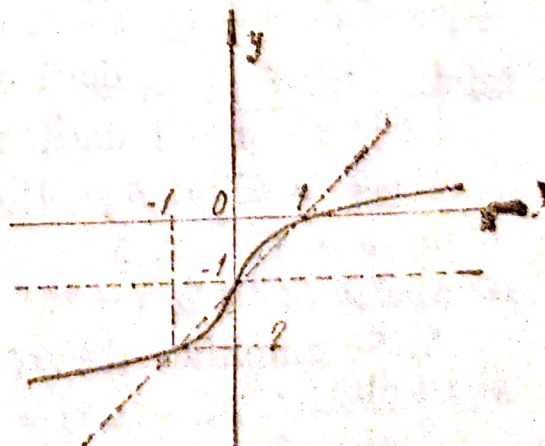


Fig. 42

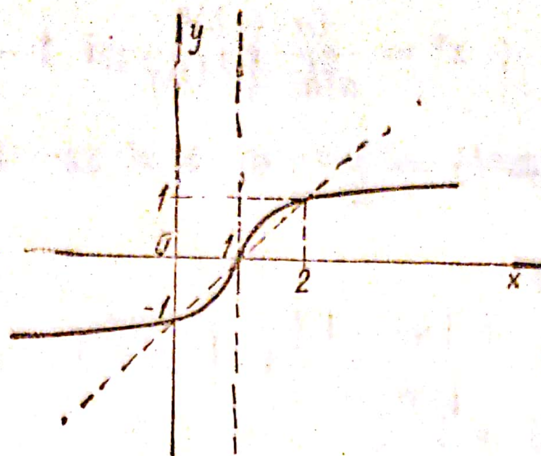


Fig. 43

TESTUL 32

1. Condițiile de existență ale radicalilor sînt: $x+7 \geqslant 0$ și $2x-3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$. Ridicînd la pătrat ambii membri ai egalității se obține ecuația: $2\sqrt{(x+7)(2x-3)} = 12-3x$. Pentru a ridica din nou la pătrat se impune condiția ca $12-3x \geqslant 0$ adică $x \leqslant 4$. Rezultă că $x \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

Ecuația devine $4(x+7)(2x-3) = (12-3x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 116x + 228 = 0$. Convine $x = 2$. **2.** Avem: $\sqrt{25-x^2} = 1-x$; cu $25-x^2 \geqslant 0$ și $x-1 \leqslant 0$; rezultă $x = -3$. **3.** Condițiile ce se impun sînt: $\begin{cases} 3-x > 0 \\ 9-5x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{9}{5}\right]$; rezultă $x = -3$. **4.** Se observă că: $\sqrt{x-a+1-2\sqrt{x-a}} + \sqrt{x-a+4+4\sqrt{x-a}} = |\sqrt{x-a}-1| + |\sqrt{x-a}+2| =$

$$= \begin{cases} 3 & \text{dacă } x \in [a, a+1] \\ 2\sqrt{x-a}+1 & \text{dacă } x \in (a+1, \infty). \end{cases}$$

Dacă $x \in [a, a+1] \Rightarrow 3 = 3$ deci soluția este $x \in [a, a+1]$. Dacă $x \in (a+1, \infty) \Rightarrow 2\sqrt{x-a}+1 = 3 \Rightarrow x = a+1 \notin (a+1, \infty)$. În final avem: $x \in [a, a+1]$.

5. Se amplifică fiecare termen cu conjugata numitorului și rezultă:

$$\sqrt{x+n} - \sqrt{x+1} = \sqrt{n};\ x \in [-1, \infty) \Rightarrow x \in \emptyset.$$

6. Ținînd seama de formula: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm$ $\pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ unde $C^2 = A^2 - B$ ecuația dată se mai scrie:

$$2\sqrt{\frac{x^2 + |x^2 - 3|}{2}} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{6} & \text{pentru } x \in \left[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{3}\right]. \\ \sqrt{4x^2 - 6} & \text{pentru } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

În final rezultă: $x \in \left[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{3}\right].$

7. Notînd $\sqrt{x-1} = z$ și aplicînd formula de la exercițiul precedent se obține: $|z-2| + |z-3| = 1$, de unde $x \in [5, 10]$. 8. $2a - 3\sqrt[3]{x^2 - a^2}\,[\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a}] = b^3$. Dar $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a} = b \Rightarrow x = \frac{|a + b^3|}{3b}\sqrt{\frac{8a - b^3}{3b}}$, cu $b^3 \in (0, 8a)$. 9. Rădăcinile sînt: $x_1 = -7$ și $x_2 = 6$. 10. Din condiția $x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \in [-1, \infty)$. Ridicînd la puterea a 6-a, și punînd din nou condiția: $3x - 1 \geqslant 0$ adică $x \in$ $\in \left[\frac{1}{3}, \infty\right) \Rightarrow x_1 = 0 \notin \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$, $x_2 = x_3 = 3 \in \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$.

11. Se împarte prin $\sqrt[n]{x^2 - 1}$ și se obține: $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} +$ $+ \sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{5}{2} = 0$. Notînd $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = u$, în final rezultă $x_1 = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$ și $x_2 = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}$ cu $x_1 > 1$ și $x_2 < 1$. 13. Operațiile au sens pentru $a^2 - x^2 \geqslant 0$ și $x \neq 0$ adică $x \in [-a, 0) \cup (0, a]$. Ecuația se scrie succesiv:

$$\frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{|x|}\sqrt{a^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right) = 0$$

În final se obține $x \in (0, a] \cup \{-a\}$.

TESTUL 33

1. a) Soluţiile sînt: $x_1 = 4$ şi $y_1 = 2$; $x_2 = 2$ şi $y_2 = 1$.

b) $$\begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1 \\ \sqrt[4]{xy}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 78. \end{cases}$$

Notînd $\sqrt{x} + \sqrt{y} = u$, $\sqrt[4]{xy} = t$ se obţine

$$\begin{cases} u = 13 \\ t = 6 \end{cases} \text{ şi în final } \begin{cases} x_1 = 2^4 \\ y_1 = 3^4 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x_2 = 3^4 \\ y_2 = 2^4. \end{cases}$$

2. a) Inecuaţia se mai scrie: $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+7} < 2$ şi se pun condiţiile:

$$\begin{cases} x + 4 \geqslant 0 \\ 2x + 7 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, \infty\right).$$

Dacă $-3x - 7 > 0$ adică $x \in \left[-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{7}{3}\right)$

Ridicînd din nou la pătrat rezultă $x^2 - 18x - 63 > 0$.

Deci soluţia inecuaţiei este $x \in \left[-\dfrac{7}{2}, -3\right)$.

b) Inecuaţia se mai scrie sub forma: $\sqrt{1 - x^2} \geqslant 2x + 1$, $x \in [-1, 1]$. Dacă $2x + 1 \leqslant 0$, adică pentru $x \in \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$ membrul stîng este pozitiv, iar membrul drept negativ şi $\Rightarrow x \in \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$. Pentru $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$, ridicînd la pătrat se obţine $x \in \left[-\dfrac{4}{5}, 0\right]$. În final rezultă că inecuaţia este satisfăcută dacă $x \in [-1, 0]$. c) Are sens pentru $x \in [6, \infty)$; $\sqrt{3x+2} \geqslant 2 + \sqrt{x-6} \Rightarrow x^2 + 28 \geqslant 0$, fiind o sumă de două numere pozitive. Deci $x \in [6, \infty)$. d) Este necesar ca $x \in \left[\dfrac{5}{2}, \infty\right)$. Ridicînd la pătrat se obţine $5 - x > \sqrt{(x+1)(2x-5)}$. Dacă $x > 5$, primul membru

este negativ, iar al doilea pozitiv și deci inegalitatea este falsă. Dacă $x \in \left[\frac{5}{2}, 5\right)$, ridicînd din nou la pătrat se obține $x^2 + 7x - 30 < 0$. Deci în final avem: $x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right)$.

TESTUL 34

1. a) Se scriu ambii membri sub forma $a + bi$. Se știe că

$$a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Se obțin $(3, 1)$; $(-3, 1)$; $(2\sqrt{2}, 0)$; $(-2\sqrt{2}, 0)$. b) Revine la a rezolva sistemul: $\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{cases}$ cu soluțiile: $(3, 2)$; $(-3, -2)$. Conduce la sistemul: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}$ cu soluțiile: $(9, 3)$, $(-9, -3)$, $(-9, 3)$, $(9, -3)$. **3.** a) Se ține cont că: $i^{4m} = 1$, $i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -i$ sau că: $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$, $i^{2k+1} = i.i^{2k} = i(-1)^k$. În final rezultă: $-3-i$.

TESTUL 35

1. Dacă o ecuație de gradul doi cu coeficienți reali admite ca rădăcină pe $z = a + bi$ atunci cea de-a doua rădăcină va fi $\bar{z} = a - bi$.

a) $z_1 = z = 3 + i \Rightarrow z_2 = \bar{z} = 3 - i$. $S = z_1 + z_2 = 6$; $P = z_1 \cdot z_2 = 10$ și ecuația va fi de forma $m(z^2 - Sz + P) = 0$, unde $m \in R$. În cazul de față ecuația va fi: $m(z^2 - 6z + 10) = 0$, $m \in R$. b) $m(z^2 - 4z + 7) = 0$, $m \in R$. c) $m(z^2 + z + 1) = 0$, $m \in R$, d) $m(z^2 + 4z + 8) = 0$, $m \in R$. **2.** c) Ecuația se mai poate scrie sub forma: $x^2 + 2x + 1 = -1 \Rightarrow (x + 1)^2 = -1 \Rightarrow x + 1 = \pm i \Rightarrow x_1 = -1+i$; $x_2 = -1-i$. **3.** I. a) Ecuația se poate scrie: $x^3 - 2^3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$ și rezultă $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + i\sqrt{3}$ și $x_3 = -1 - i\sqrt{3}$.

c) Se mai poate scrie:

$(\sqrt{3x^2})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3x^2})^2 + 2\sqrt{15x^2} + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{15x^2} = (\sqrt{3}x^2 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt[4]{60}x)^2 = (\sqrt{3}x^2 - \sqrt[4]{60}x + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}x^2 + \sqrt[4]{60}x + \sqrt{5}) = 0$, iar rădăcinile sînt:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt[4]{540}}{6}(1 \pm i) \text{ și } x_{3,4} = -\frac{\sqrt[4]{540}}{6}(1 \pm i).$$

II. a) $x_1+x_2+x_3=0$; b) 0; c) 0; d) 0. III. a) $x_1x_2x_3=8$; b) $x_1x_2x_3 = -8$; c) $x_1x_2x_3x_4 = \frac{5}{3}$; d) $x_1x_2x_3x_4 = -2$.

4. a) Se știe că oricare ar fi numărul complex $a + bi$ poate fi reprezentat geometric printr-un vector $\overrightarrow{OM}$ de coordonate (a, b). Fie $1 + 2i$ reprezentat în plan prin vectorul $\overrightarrow{OM_1}$ și $1 - 2i$ prin vectorul $\overrightarrow{OM_2}$ unde: $M_1(1, 2)$, $M_2(1, -2)$. Atunci membrul stîng al egalității adică suma $(1 + 2i) + (1 - 2i)$ este reprezentată geometric în plan prin $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ ($\overrightarrow{OR}$ s-a determinat aplicînd „regula paralelogramului", la adunarea vectorilor). Membrul drept al egalității reprezintă vectorul $\overrightarrow{OR'}$ cu R' (0, 2) și este egal tocmai cu vectorul sumă $\overrightarrow{OR}$, figura 44.

b) Vezi figura 45.

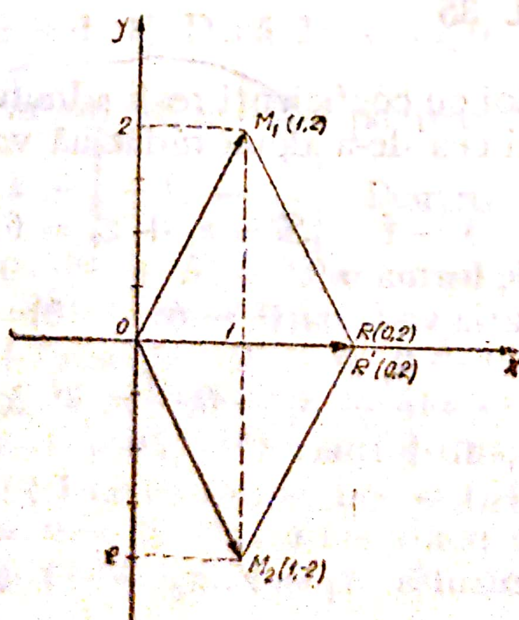


Fig. 44

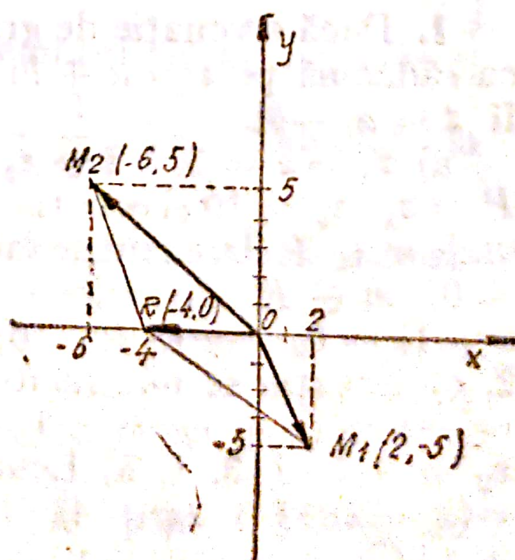


Fig. 45

TESTUL 36

1. Înlocuind în $E(z)$ pe $z = a + bi$ se obține:

$$E(a + bi) = \frac{-2a^2b - 2b^3 - b^2 + 3b - 3a^2 - 1}{4a^2 + 2(b - 1)^2} +$$

$$+ i\frac{2a^2 + 2ab^2 - 2ab + a}{4a^2 + (2b - 1)^2}.$$

2. a) $z = 0 + 0 \cdot i \vee z = 1 + 0 \cdot i \vee z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \vee$ $\vee z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ i. b) $z = 1 + 0 \cdot i \vee z = +2 + 0 \cdot i \vee$ $\vee z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \vee z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ i. **3.** $E(2-i) = -3(1 + 6i)$.

4. a) Se scrie: $(a^2 - b^2) + i(2ab) = 1 + 1 \cdot i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \pm\left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}}\right)$ c) $z^3 = (a +$ $+ bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$ de unde $z^3 = 1 - i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 1 \\ 3a^2b - b^3 = -1 \end{cases}$ adunîndu-le se obține $a = b$, deci $2a^3 =$ $= -1 \Rightarrow a = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; $b = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow z = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1 + i)$.

Se procedează analog pentru $b = (-2 \pm \sqrt{3})a$.

d) $z = 0 - 1 \cdot i \vee z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \vee z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ i.

5. a) Ecuația se mai scrie $(z^2)^2 = 1 + i$ și conform punctului 4. a) rezultă că $z^2 = \pm\left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}}\right)$,

exercițiu asemănător celor de la punctul 4. În final se obțin rădăcinile:

$$z_{1,2} = \pm \sqrt[8]{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}}\right);$$

$z_{3,4} = \pm i \cdot z_{1,2}$. b) Procedînd analog se obțin în final rădăcinile:

$$z_{1,2} = \pm \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$z_{3,4} = \pm \sqrt[4]{8}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} - i\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right]$$

6. Perechile (x, y) reprezintă coordonatele unor puncte din plan ce aparțin unei curbe de ecuație $f(x, y) = 0$. a) $|\sqrt{x+y} + i\sqrt{x-2y}| = (\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{x-2y})^2 = x + y + x - 2y = 2x - y$. Deci egalitatea devine $2x - y = 1$ sau $2x - y - 1 = 0$ (adică ecuația unei drepte). b) Punctele se află pe dreapta de ecuație: $4x + y - 5 = 0$. c) Punctele se află pe parabola de ecuație: $y = -x^2 + 1$.

TESTUL 37

1. a) $\Delta \geq 0 \Rightarrow m \in \left[-\frac{3}{11}, 3\right]$;

b) $\Delta < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{3}{11}\right) \cup (3, \infty)$.

c) $\Delta \geq 0$ și $P > 0 \Rightarrow m \in \left[-\frac{3}{11}, -\frac{1}{5}\right) \cup (0, 3]$;

d) $\Delta \geq 0$ și $P < 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{5}, 0\right)$;

e) $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (0, 3]$;

f) $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left[-\frac{3}{11}, -\frac{1}{5}\right)$

2. Vezi tabelul:

m	Δ	P	S	Concluzii
$m \in \left(-\infty, -\frac{3}{11}\right)$	$-$	$+$		$x_1, x_2 \notin R.$
$m = -\frac{3}{11}$	0	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 = x_2 > 0$
$m \in \left(-\frac{3}{11}, -\frac{1}{5}\right)$	$+$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 \neq x_2;\ x_1 > 0;\ x_2 > 0.$
$m = -\frac{1}{5}$	$+$	$\mid$	$\mid$	Ecuația devine $8x - 3 = 0$
$m \in \left(-\frac{1}{5}, 0\right)$	$+$	$-$	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
$m = 0$	$+$	0	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 = 0;\ x_2 < 0$
$m \in (0, 3)$	$+$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 \neq x_2;\ x_1 < 0;\ x_2 < 0$
$m = 3$	0	$+$	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 = x_2 < 0$
$m \in (3, +\infty)$	$-$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \notin R$

3. $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{7m+3}{5m+1}$; $P = \dfrac{3m}{5m+1}$. Se elimină m între cele două relații și rezultă: $x_1 + x_2 = \dfrac{8}{3}x_1x_2 - 3.$

4. Se scriu relațiile lui *Vieta* la care se adaugă fiecare relație rezultată din condiția dată. Se elimină x_1 și x_2 între cele trei relații obținînd în final o ecuație în m.

a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{7m+3}{5m+1} \\ x_1x_2 = \dfrac{3m}{5m+1} \end{cases} \text{ și } x_1 = 2x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{7m+3}{3(5m+1)}\right]^2 = \frac{3m}{2(5m+1)};$$

ecuația ale cărei rădăcini sînt valorile cerute. b) Condiția $x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3m}{5m+1} = 1\ m = -\dfrac{1}{2}$. c) Condiția $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{7+3m}{5m+1} = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{3}{7}$. **5.** Se utilizează una din metodele expuse la testul 24. **6.** Vezi testul 4.

TESTUL 38

1. Funcția se mai scrie: $f(x) = |x^2 - 3| + |x - 1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{dacă } x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \\ -x^2 - x + 4 & \text{dacă } x \in (-\sqrt{3}, 1] \\ -x^2 + x + 2 & \text{dacă } x \in (1, \sqrt{3}] \\ x^2 + x - 4 & \text{dacă } x \in (\sqrt{3}, +\infty). \end{cases}$$

Graficul este trasat în figura 46. **2.** Vezi testlul 28.

3. Funcția este $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \in (0, 1) \\ x^2 \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \end{cases}$

iar graficul este trasat în figura 47. **4.** Vezi testul 14.

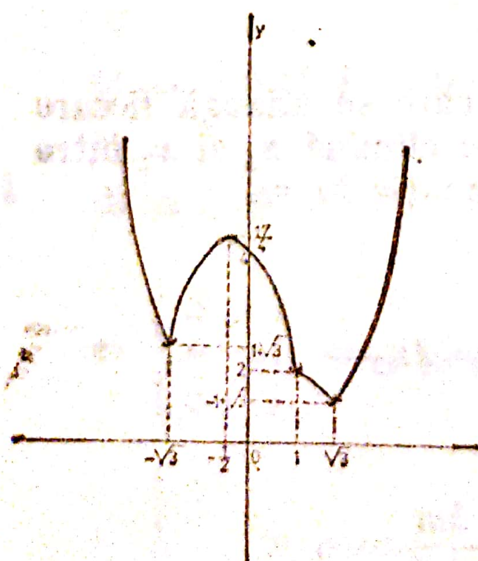


Fig. 46

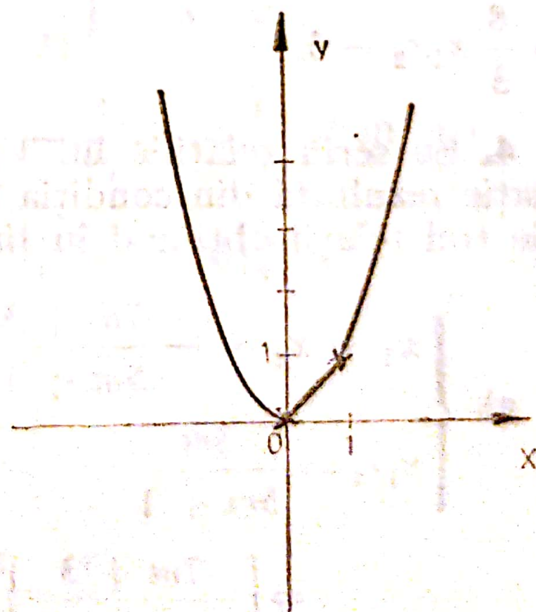


Fig. 47

5. Deoarece $\max\limits_{x \in R} (1, x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in (-\infty, 1] \\ x \text{ dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$ şi

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x \in [0, +\infty) \\ -x \text{ dacă } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

rezultă că $f(x) = \begin{cases} -x \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \\ x \text{ dacă } x \in [0, 1] \\ x^2 \text{ dacă } x \in (1, \infty), \end{cases}$

iar graficul este trasat în figura 48.

6. Această funcţie se numeşte funcţie unitate sau funcţia lui Heaviside şi se notează cu $\eta(x)$ sau $\sigma(x)$.

7. Funcţia se mai scrie sub forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \\ 0 \text{ dacă } x \in \{1, 2\} \\ -1 \text{ dacă } x \in (1, 2). \end{cases}$$

8. $f(x) = -1, \ (\forall) \ x \in R.$

10. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } |x| > 1 \\ 0 \text{ dacă } |x| = 1 \\ -1 \text{ dacă } |x| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) =$

$$= \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ 0 \text{ dacă } x \in \{-1, 1\} \\ -1 \text{ dacă } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

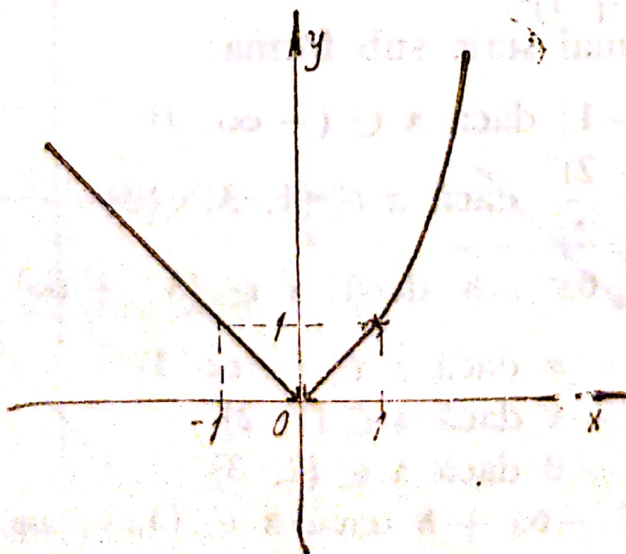


Fig. 48

TESTUL 39

1. Vezi testul 15. **2.** Cum din relația $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ înseamnă că funcția este injectivă. Pentru $\alpha \in R \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, ecuația $\frac{ax+b}{cx+d} = \alpha$, cu necunoscuta x, admite soluție în mulțimea $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, deci f este și surjectivă. Fiind bijectivă admite inversă și aceasta este

$$f^{-1}: R \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \to R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

3. a) Dacă $x \in (-\infty, 2) \Rightarrow f(x) = 2x - 3$ funcția este bijectivă. Dacă $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$ sau $f(x) = (x-2)^2 + 1$, și este strict crescătoare, deci este injectivă. Ecuația $x^2 - 4x + 5 = \alpha$, are rădăcina $x = 2 + \sqrt{\alpha - 1}$ pentru $x \geqslant 2$ și $\alpha \geqslant 1$. b) Inversa funcției este

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{2} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \\ 2 + \sqrt{x-1} & \text{dacă } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

TESTUL 40

1. Mai întîi trebuie să se verifice, dacă pot să fie compuse aceste funcții:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x + 1$. b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2x + 1$. c) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = [f(x)]^3 = x^3$. d) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 2x^3 + 1$. e) $h \circ (g \circ f) = (2x+1)^3$. f) $(h \circ g) \circ f = (2x+1)^3$.

2. Funcția se mai scrie sub forma:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{(x-2)^2}{|x-2|} & \text{dacă } x \in [1, 3] \setminus \{2\} \\ x^2 - 6x + 8 & \text{dacă } x \in (3, +\infty) \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \\ 2 - x & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ x - 2 & \text{dacă } x \in (2, 3] \\ x^2 - 6x + 8 & \text{dacă } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

5. Funcţia se mai scrie sub forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 \text{ dacă } x \in [-6, -3] \\ x + 1 \text{ dacă } x \in [1, 6] \\ 2 \text{ dacă } x \in (-3, 1). \end{cases}$$

TESTUL 41

1. a) Pentru $m = -1$, funcţia este

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 \text{ dacă } x < -1 \\ -x - 3 \text{ dacă } x \geqslant -1. \end{cases}$$

În figura 49 se observă că pentru $b \in (-2, -1]$ dreptele $y = b$ nu intersectează graficul, deci funcţia nu este surjectivă. b) Pe graficul din figura 50 se observă că funcţia nu este injectivă. c) Din studiul de la punctele a) şi b) rezultă că funcţia este bijectivă dacă semidreapta $y = mx - 3$, $(x \geqslant -1)$, trece prin punctul $A(-1, -1)$ deci $-1 = -m - 3 \Rightarrow m = -2$. d) Pentru $m = -2$, funcţia

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 \text{ dacă } x < -1 \\ -2x - 3 \text{ dacă } x \geqslant -1 \end{cases}$$

este bijectivă şi inversa sa este

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x - 2 \text{ dacă } x \in (-1, +\infty) \\ -\dfrac{x + 3}{2} \text{ dacă } x \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

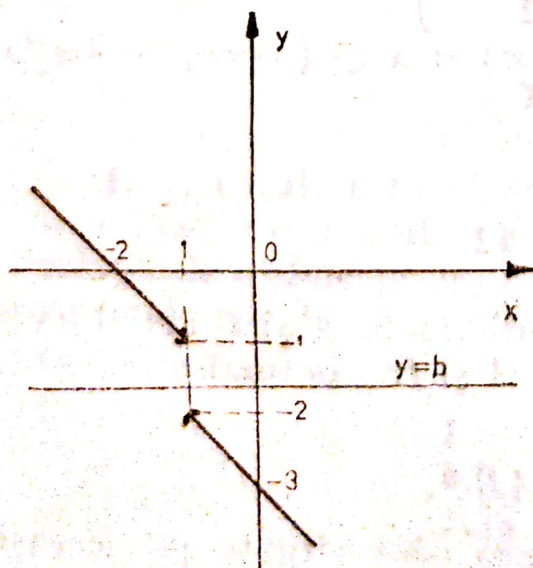


Fig. 49

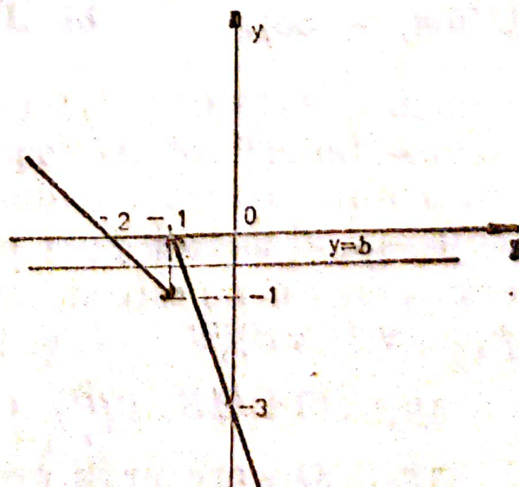


Fig. 50

2. *Metoda I.* Se notează $\sqrt{2x-1}=t$, $x \geq \frac{1}{2}$ și rezultă $x = \frac{t^2+1}{2}$. Așadar, $y = \frac{t^2+1}{2} - 1 - t \Rightarrow y = \frac{t^2-2t-1}{2}$. Minimul trinomului $y = \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}$ este atins pentru $t = 1$ și $y(1) = -1$. Deci minimul funcției date are loc pentru $\sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ și după cum s-a văzut este egal cu -1. *Metoda a II-a.* Scriem $y = x - 1 - \sqrt{2x-1}$, $x \geq \frac{1}{2}$, și mai departe după calcule simple se obține ecuația în x: $x^2 - 2(y+2)x + y^2 + 2y + 2 = 0$. Discriminantul acestei ecuații este $\Delta = 2y + 2$. Ecuația admite rădăcini reale pentru $y \geq -1$. Deci $y = f(x)$ are minimul egal cu -1. **3.** a) Inecuația se mai scrie:

$$\frac{x^2-2mx-24m^2}{2m+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+4m)(x-6m)}{2m+1} \geq 0.$$

Cazul I. Dacă $2m+1<0$ adică $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ este necesar ca $(x+4m)(x-6m) \leq 0 \Rightarrow x \in [6m, -4m]$. *Cazul II.* Dacă $m \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \Rightarrow (x+4m)(x-6m) \geq 0$.

Se disting situațiile: $m \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow x \in (-\infty, 6m] \cup [-4m, +\infty)$ și $m \in [0, +\infty) \Rightarrow x \in (-\infty, -4m] \cup [6m, +\infty)$.

TESTUL 42

1. $\neg p_1$: „Există două puncte distincte A și B astfel încît orice punct C nu este situat între A și B". Formalizarea este: p_1: „$(\forall A)(\forall B)(\exists C)$, $C \in |AB|$".

$\neg p_1$: „$(\exists A)(\exists B)$ $(\forall C)$, $C \notin |AB|$".

$\neg p_2$: „Oricare ar fi trei puncte, sînt situate pe aceeași dreaptă"

Formalizarea: p_2 „$(\exists A)(\exists B)(\exists C)[A \notin |BC| \wedge B \notin |AC| \wedge \wedge C \notin |AB|]$"

$\rceil p_2$ „$(\forall A)(\forall B)(\forall C)[A \in |BC|) \vee B \in |AC| \vee C \in |AB|]$"

2. a) p_1: „$(\forall x)(\forall y) p(x, y)$"; p_2: „$(\forall x)(\exists y)\ p(x, y)$"; p_3: „$(\exists x)(\forall y)\ p(x, y)$"; p_4: „$(\exists x)(\exists y) p(x, y)$".

b) $\rceil p_2 \equiv \rceil[(\forall x)(\exists y)\ p(x, y)] \equiv (\exists x)\ \rceil[(\exists y)\ p(x, y)] \equiv \equiv (\exists x)(\forall y)\ \rceil p(x, y)$.

c) p_1 are valoarea de adevăr „0" în toate cazurile, p_2 are valoarea de adevăr „1" în toate cazurile, p_3 are valoarea de adevăr „1" numai pentru $x \in C \wedge y \in C$, p_4 are valoarea de adevăr „1" în toate cazurile.

3. a) Propoziția p este echivalentă cu propoziția „$x \in \{3\}$", q este echivalentă cu „$x \in (-2, 3)$", iar r echivalentă cu $x \in [2, \infty)$, fiindcă $a^2 + 4b^2 - 2a + 4b + x \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (2b+1)^2 - 2 + x \geqslant 0$. b) Soluțiile pot să fie sintetizate în următorul tabel:

Propoziția			Mulțimea căreia aparține x
p	q	r	
0	1	1	$(R \setminus \{3\}) \cap (-2, 3) \cap [2, +\infty) = [2, 3)$.
1	0	1	$\{3\} \cap \{(-\infty, (-2] \cup [3, +\infty)\} \cap [2, \infty) = \{3\}$.
1	1	0	$\{3\} \cap (-2, 3) \cap (-\infty, 2) = \varnothing$

Deci $x \in [2, 3]$.

TESTUL 43

1. a) Cîtul este $h = x^4 + 1{,}2x^3 + 0{,}44x^2 + 0{,}528x + 1{,}7336$, iar restul este $r = 1{,}58032$. b) Ținînd seama de relația de ordine pe mulțimea numerelor reale, aproximările zecimale ale lui $r = 1{,}58032$ se pot ilustra în următoarul tabel:

$$1 \leqslant r < 2$$
$$1{,}5 \leqslant r < 1{,}6$$
$$1{,}58 \leqslant r < 1{,}59$$
$$1{,}580 \leqslant r < 1{,}581$$
$$1{,}5803 \leqslant r < 1{,}5804$$

2. Pentru $x = m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** a) Din punct de vedere al valorii de adevăr propozițiile sînt ochivalente. Demonstrația se face folosind schema: $(p_1) \Rightarrow (p_2) \Rightarrow (p_3) \Rightarrow (p_1)$. Astfel:

$(p_1) \Rightarrow (p_2)$. Fie x_1 rădăcina întreagă, atunci $x_2 = \frac{\beta}{x_1} \in Q$ și cum (p_1) este adevărată rezultă că $x_2 \in Z \Rightarrow \frac{\beta}{x_1} \in Z$ adică x_1 divide β.

$(p_2) \Rightarrow (p_3)$. Fie $x_1 \in Z \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{x_1}$ și cum p_2 este adevărată $\Rightarrow x_1$ divide $\beta \Rightarrow \frac{\beta}{x_1} \in Z \Rightarrow x_2 \in Z$.

$(p_3) \Rightarrow (p_1)$. Fie $x_1 = \frac{m}{n} \in Q$ cu $m \in Z$, $n \in Z \setminus \{0\}$ numere prime. Atunci $m^2 + mn\alpha + n^2\beta = 0 \Rightarrow m$ divide β. Dar, pe de altă parte, $x_2 = \frac{\beta}{x_1} = \frac{n\beta}{m} \in Z \Rightarrow x_2 \in Z$ și cum p_3 este adevărată $\Rightarrow x_1 \in Z$.

b) Deoarece propozițiile sînt echivalente este suficient să se determine valoarea de adevăr a uneia dintre ele. Se va arăta, de exemplu, că p_2 are valoarea de adevăr „1". Dacă $x_1 \in Z$ este o rădăcină a ecuației date atunci $x_1(x_1 + \alpha) = -\beta$ și cum $x_1 + \alpha \in Z \Rightarrow x_1$ divide β.

TESTUL 44

1. a) Pentru $m = 2$, inecuația se scrie: $|x^2 - 3x + 2| + 2|x - 3| \geq 4$. Se notează cu $E(x) = |x^2 - 3x + 2| + 2|x - 3| - 4$, sau după explicitarea modulelor

$$E(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \cup (2, 3] \\ -x^2 + x & \text{dacă } x \in (1, 2] \\ x^2 - x - 8 & \text{dacă } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Pentru $x \in (-\infty, 1] \cup (2, 3]$ inecuația se scrie $x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. Deci soluția inecuației în acest caz este $x \in \{(-\infty, 1] \cup (2, 3]\} \cap \{(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)\}$, adică $x \in (-\infty, 1]$.

Pentru $x \in (1, 2]$, inecuația se scrie $-x^2 + x \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in [0, 1]$. Deci soluția inecuației este $x \in [0, 1] \cap (1, 2] = \emptyset$.
Pentru $x \in (3, +\infty)$ inecuația $x^2 - x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \in$ $\in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{33}}{2}, +\infty\right)$ Deci în acest caz $x \in \left[\frac{1+\sqrt{33}}{2}, +\infty\right)$. Așadar, soluția inecuației este $x \in (-\infty, 1] \cup \left[\frac{1+\sqrt{33}}{2}, +\infty\right)$, fiind reuniunea soluțiilor obținute anterior. **2.** a) În inegalitatea $y - 5 < x <$ $< y + 5$ se scade y în fiecare membru și se obține $-5 <$ $< x - y < 5 \Leftrightarrow |x - y| < 5$. b) Se scade 2 și se obține $|x - 2| < 4$. c) Se adaugă -5 și se obține $|x - 5| < 6$. d) $x + y \geq 5$ sau $x + y \leq -5 \Leftrightarrow |x + y| \geq 5$. **3.** $M_1 =$ $= \{(7, -5), (-5, 7)\}$. $M_2 = \{(2, 3), (-2, -3)\}$. $M_3 =$ $= \{(2, 3)\}$. $M_4 = \{(2, -3)\}$.

TESTUL 45

1. a) Se observă că $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$. b) Ecuația se mai scrie forma $|x - 3| - 2(x + 1) = a$ cu soluția:

$$x = \begin{cases} -a - 5 & \text{dacă } a < -8 \\ 3 & \text{dacă } a = -8 \\ \dfrac{1-a}{3} & \text{dacă } a > -8. \end{cases}$$

c) Folosind formulele $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C^2 = A^2 - B$, ecuația se scrie: $2\sqrt{\frac{x^2 + |x^2 - \sqrt{5}|}{2}} =$

$$= \begin{cases} \sqrt[4]{20} \text{ pentru } x \in [-\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5}] \\ \sqrt{4x^2 - 2\sqrt{5}} \text{ pentru } x \in (-\infty, -\sqrt[4]{5}) \cup (\sqrt[4]{5}, +\infty). \end{cases}$$

Deci soluția este $x \in [-\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5}]$. d) Punînd condițiile $\begin{cases} 1-x \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [0, 1]$; soluția fiind $x = \frac{3-\sqrt{5}}{6}$. e) Din condițiile $\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 4-x^2 \geqslant 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$.

TESTUL 46

1. a) Se notează $y = x^2 - x + 1$ și ecuația se scrie $y^4 - 10x^2y^2 + 9x^4 = 0$. Se împarte prin x^4 și în final se obțin rădăcinile $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = -1$, $x_{5,6} = 1$, $x_{7,8} = \pm i$. Sau, se notează $t = (x^2 - x + 1)^2$ și apoi se descompune trinomul $t^2 - 10x^2t + 9x^4 = (t - x^2)(t - 9x^2) \Rightarrow t - x^2 = 0$ sau $t - 9x^2 = 0$ etc. b) $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_{5,6} = -3 \pm \sqrt{10}$; $x_{7,8} = \frac{1}{2}\left(-5 \pm \sqrt{29}\right)$. c) $x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $x_3 = \frac{4}{5}$. e) $x_1 = \alpha$, $x_{2,3} = \frac{1}{4}\left[\alpha + 3\beta \pm (\alpha - \beta)i\sqrt{15}\right]$.

2. a) Se notează $\left[\frac{x+2}{3}\right] = m$ și $\left[\frac{y+1}{3}\right] = n$, $m \in Z$, $n \in Z$ și sistemul se scrie: $\begin{cases} x = 2n - 3 \\ y = 2m + 3 \end{cases}$ unde $m \leqslant \frac{x+2}{3} < m + 1$ și $n \leqslant \left[\frac{y+1}{3}\right] < n + 1$. Soluțiile sistemului sînt $x_1 = -3$, $y_1 = 1$, $x_2 = -1$, $y_2 = 3$, $x_3 = 1$, $y_3 = 5$. c) Ținînd seama de definiția părții întregi rezultă că: $[x] + [y] \leqslant x + y < [x] + 1 + [y] + 1$ și $[x + y] \leqslant x + y \leqslant [x + y] + 1$ deci: $[x + y] = [x] + [y]$ sau $[x + y] = [x] + [y] + 1$. Deci sistemul se scrie:

$$\begin{cases} [x+y] = 4 + 1 \\ [xy] = 3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} [x+y] = 4 \\ [xy] = 3 \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 4 \leqslant x + y < 5 \\ 3 \leqslant xy < 4 \end{cases}$$

sau $\begin{cases} 5 \leqslant x + y < 6 \\ 3 \leqslant xy < 4 \end{cases}$ cu soluțiile $x_1 = 1$, $y_1 = 3$ și $x_2 = 3$, $y_2 = 1$.

TESTUL 47

1. Ecuația de gradul al doilea este $x^2 - Sx + P = 0$ unde $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 \cdot x_2$. Discriminantul ecuației este $\Delta = S^2 - 4P \Rightarrow 9P = S^2 - \Delta \Rightarrow P = \frac{S^2 - \Delta}{4} \Rightarrow P =$ $= \frac{m^2 + 2m + 1 - m^2 + 4m - 4}{4} \Rightarrow P = \frac{6m - 3}{4}$. Deci ecuația este $K\left[x^2 - (m+1)x + \frac{6m-3}{4}\right] = 0$.

2. *Cazul I*. Dacă $x < 0$, avem: $\left|\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}\right| > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{|x^2 - x - 2| - |x^2 + x - 6|}{|x^2 + x - 6|} > 0$, și se consideră situațiile $x \in (-\infty, -3)$, $x \in (-3, -1]$, $x \in (-1, 0)$. *Cazul II*. Dacă $x \geqslant 0$ se consideră cazurile $x \in [0, 1]$, $(1, 3]$ și $x \in (3, +\infty)$. **3.** a) $E(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 1}$ b) $E(x) > \frac{1}{1 - x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} > 0$. **4.** Propoziția p are valoarea de adevăr „1". **5.** Fie $z = a + bi$, $a \in R$, $b \in R$. Atunci ecuația se scrie:

$$2(a + bi) + \sqrt{a^2 + b^2} + 8i = 1 \Leftrightarrow 2a - \sqrt{a^2 + b^2} - 1 =$$
$$= -i(2b + 8)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 8 = 0 \\ 2a - 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ (2a - 1)^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow Z = 3 - 4i.$$

S-a ținut seama că $a \geqslant \frac{1}{2}$

TESTUL 48

1. Să presupunem că $x = \frac{p}{q}$; $p, q \in Z$, $q \neq 0$, este o rădăcină rațională a ecuației date. Dacă p și q sînt impare, substituind în ecuația dată rezultă că suma a trei numere impare este nulă, ceea ce este imposibil. Dacă p și q sînt de parități diferite rezultă că suma dintre un număr impar și două

numere pare trebuie să fie nulă ceea ce este imposibil. Altfel: Fie $a = 2p + 1$ $b = 2q + 1$; $c = 2t + 1$ și să presupunem că Δ este pătrat perfect (evident impar); $\Delta = (2s + 1)^2 \Rightarrow \Leftrightarrow q^2 + q - 4pt - 2t - 2p - 1 = s^2 - s$ sau $(q - s)(q + s + 1) = 4pt + 2t + 2p + 1$, egalitate imposibilă (în membrul drept este un număr impar, iar în membrul stîng un număr par). **2.** Se mai poate scrie $P(n) = 8 \cdot 16^n + 5 \cdot 3^n = 8(13 + 3)^n + 5 \cdot 3^n = 8(13^n + C_n^1 13^{n-1} \cdot 3 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 13 \cdot 3^{n-1} + 3^n) + 5 \cdot 3^n = M13 + 8 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n = M13$. *Prin inducție matematică:* $P(1) = 143 = M13$ și se presupune că $P(n) = 2^{4n+3} + 5 \cdot 3^n = M13$ este adevărată. Deci $2^{4n+3} + 5 \cdot 3^n = M13 \Rightarrow 5 \cdot 3^n = M10 - 2^{4n+3}$. Să demonstrăm că $P(n + 1) = 2^{4n+7} + 5 \cdot 3^{n+1} = M'13$. Dar $5 \cdot 3^{n+1} = M''13 - 3 \cdot 2^{4n+3} \Rightarrow P(n + 1) = 2^{4n+7} + M''13 - 3 \cdot 2^{4n+3} = M''13 + 2^{4n+3}(16 - 3) = M''13 + 13 \cdot 2^{4n+3} = M13$. **3. A.** Se discută după valorile parametrilor reali α și β și se consideră ecazurile: c_1) Pentru $\alpha \in (-\infty\ 0)$ și $\beta \in (-\infty, 0)$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — c_1; c_2) Pentru $\alpha \in (-\infty, 0)$ și $\beta = 0$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — c_2; c_3) Pentru $\alpha \in (-\infty, 0)$ și $\beta \in (0, \infty)$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — c_3; c_4) Pentru $\alpha = 0$

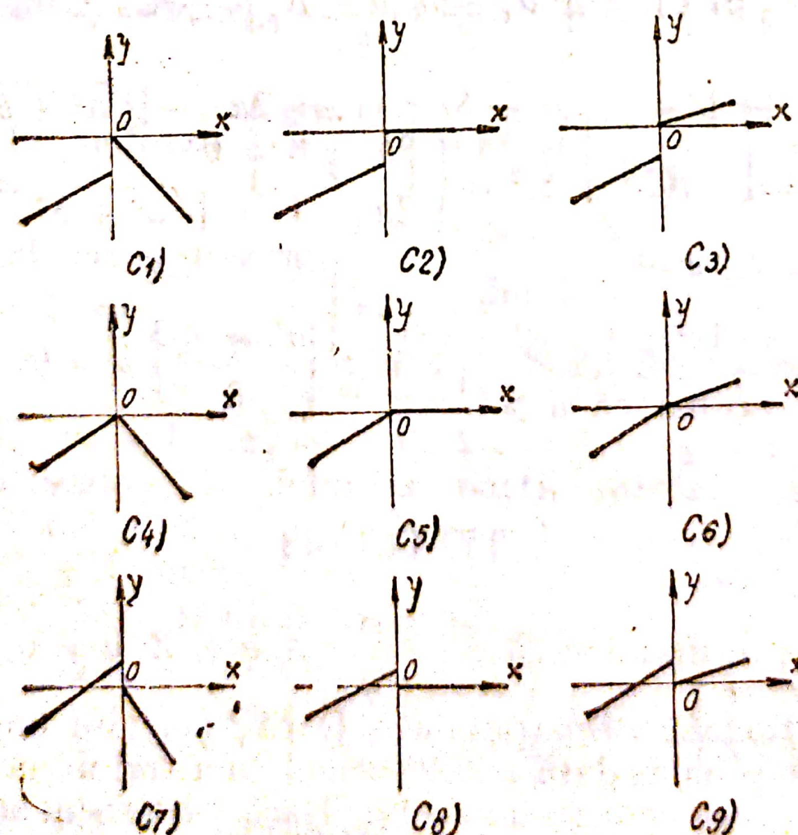


Fig. 51

și $\beta \in (-\infty, 0)$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — c_4; c_5) Pentru $\alpha = 0$ și $\beta = 0$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — c_5; c_6) Pentru $\alpha = 0$ și $\beta \in (0, \infty)$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — c_6; c_7) Pentru $\alpha \in (0, \infty)$ și $\beta \in (-\infty, 0)$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — — c_7; c_8) Pentru $\alpha \in (0, \infty)$ și $\beta = 0$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — c_8; c_9) Pentru $\alpha \in (0, \infty)$ și $\beta \in (0, \infty)$ graficul funcției g este trasat în figura 51 — c_9.

Observații. În reprezentarea grafică s-a ținut cont de faptul că acolo unde avem un fascicul de drepte este suficientă reprezentarea grafică pentru o anumită valoare a parametrului din intervalul respectiv. Se va ține seama că mulțimea în care funcția g ia valori este R, pe cînd mulțimea valorilor funcției pentru fiecare caz în parte este proiecția graficului pe axa ordonatelor. Funcția va fi injectivă, surjectivă, bijectivă după cum orice dreaptă $y = b$, $b \in R$, intersectează graficul respectiv în cel mult un punct, cel puțin un punct, într-unul și numai un singur punct.

B. Vezi testul 16. **4.** A. α) Dacă x este necunoscută și m, y parametri reali $\Rightarrow x(m - y) = 2(y + 1) - m$. Pentru $m \neq y \Rightarrow x = \dfrac{2y - m + 2}{m - y}$; pentru $m = y = -2 \Rightarrow x \in R$; pentru $m = y \neq -2 \Rightarrow x \in \emptyset$. β) Dacă y este necunoscuta și m, x parametri reali $\Rightarrow y(x + 2) = m(x + 1)$. Pentru $x \neq -2 \Rightarrow y = \dfrac{mx + m - 2}{x + 2}$; pentru $m = x = -2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in R$; Pentru $m \neq -2$ și $x = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$. γ) Dacă m este necunoscuta și x, y parametri reali $\Rightarrow m(x + 1) =$ $= y(x + 2) + 2$. Pentru $x \neq -1 \Rightarrow m = \dfrac{xy + 2y + 2}{x + 1}$; pentru $x = -1$ și $y = -2 \Rightarrow m \in R$; pentru $x = -1$ și $y \neq -2 \Rightarrow x \in \emptyset$.

B. Expresia lui $y(x)$ va fi: $y(x) = \dfrac{m(x + 1) - 2}{x + 2}$. Pentru a studia semnul lui $y(x)$ se studiază semnul funcției de gradul doi: $y(x) = (x + 2) \cdot [m(x + 1) - 2]$ unde ecuația atașată are rădăcinile $x_1 = -2$ și $x_2 = \dfrac{2 - m}{m}$. Discuțiile

vor avea în vedere diferitele valori ale lui $m \in R$ privind semnul coeficientului lui x^2 cît și ordonarea rădăcinilor x_1 și x_2.

a) $m \in (-\infty, -2) \Rightarrow x_1 < \alpha$;

x	$-\infty$		-2		α		$+\infty$
$y(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

deci $x \in (-2, \alpha)$.

b) $m = -2 \Rightarrow -2 > 0$. Deci $x \in \emptyset$.

c) $m \in (-2, 0) \Rightarrow \alpha > x_1$;

x	$-\infty$		α		-2		$+\infty$
$y(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

deci $x \in (\alpha, -2)$.

d) $m = 0 \Rightarrow y(x) > 0$. Deci $x \in (-\infty, -2)$.

e) $m \in (0, \infty) \Rightarrow x_1 < \alpha$;

x	$-\infty$		-2		α		$+\infty$
$y(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

deci $x \in (-\infty, -2) \cup (\alpha, \infty)$.

TESTUL 49

1. $A = 2^{\frac{1}{2}}$; $B = 2^{\frac{2}{3}}$; $\Rightarrow A < B$. **2.** $A = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{7}{2}}$; $B = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{11}{4}} \Rightarrow A < B$. **3.** $A = a^{-\frac{1}{5}}$; $B = a^{\frac{2}{3}}$.

În cazul în care $0 < a < 1$ rezultă că $A > B$ și în cazul în care $1 < a$ rezultă că $A < B$.

4. $A = \pi^{\sqrt{3}+1}$; $B = \pi^2 \Rightarrow A > B$. **5.** $A = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$; $B = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \Rightarrow A < B$. **6.** $A = (5 + 2\sqrt{6})^{1+\sqrt{3}}$; $B = (5 + 2\sqrt{6})^{\sqrt{5}} \Rightarrow A > B$. **7.** $A = B = a^{4-2\sqrt{3}}$.

TESTUL 50

1. Toate afirmațiile sînt adevărate.

2. Se pun condițiile: a) $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1-x^2>0 \\ x\geqslant 0 \\ 1-x^2\neq 1. \end{cases}$

c) $x+1>0.$ d) $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x^2-1>0. \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ 4-x^2>0. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1. \end{cases}$

3. Tabelele de valori sînt:

a)

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)=5^x$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{25}$	$\nearrow$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	5	$\nearrow$	25	$\nearrow$	$+\infty$

;

b)

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)=\frac{1}{5^x}$	∞	$\searrow$	25	$\searrow$	5	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{5}$	$\searrow$	$\frac{1}{25}$	$\searrow$	0

;

c)

x	0		$\frac{1}{25}$		$\frac{1}{5}$		1		5		52		$+\infty$
$f(x)=\log_5 x$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

;

d)

x	0		$\frac{1}{25}$		$\frac{1}{5}$		1		5		25		$+\infty$
$f(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$	$+\infty$	$\searrow$	$+2$	$\searrow$	$+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

,

iar graficele sînt trasate în figurile 52, 53, 54, 55. Este interesant de comparat tabelele de valori ale funcțiilor: $f(x)=5^x$ și $f(x)=\log_5 x$, $f(x)=\frac{1}{5^x}$ și $f(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$. Desigur graficul funcției $f(x)=\log_5 x$ este simetricul graficului func-

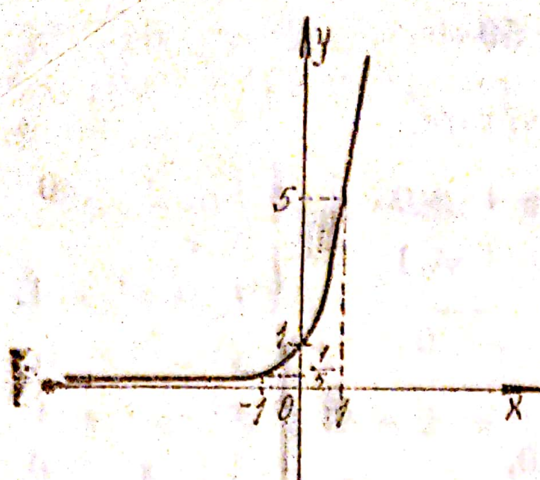


Fig. 52

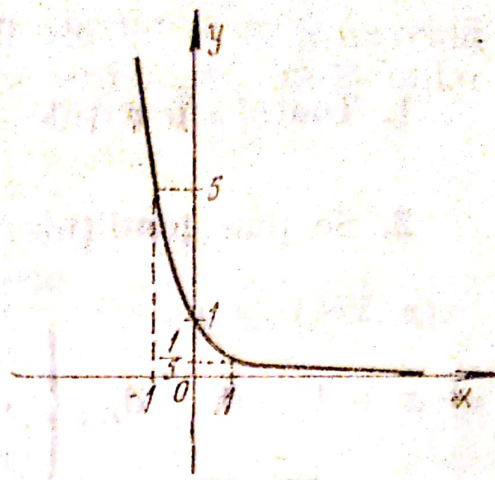


Fig. 35

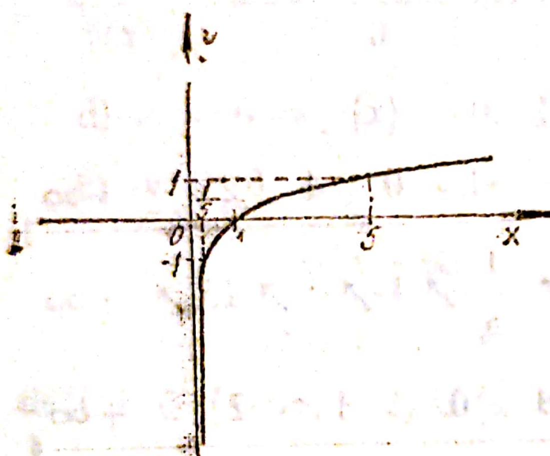


Fig. 54

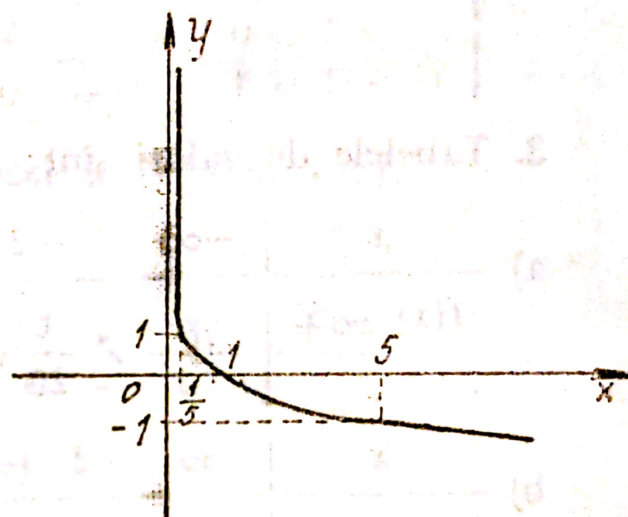


Fig. 55

ției $f(x) = 5^x$ față de prima bisectoare, iar graficul funcției $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ este simetricul graficului funcției $f(x) = \frac{1}{5^x}$ față de prima bisectoare a axelor de coordonate.

TESTUL 51

I. a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{59}{12}$; c) 3; d) $-\frac{7}{24}$. **II.** a) 0; b) 3; c) 3. **III.** a) $\lg 2025 = \lg(3^4 \cdot 5^2) = 4 \lg 3 + 2 \lg 5 = 4 \lg 3 + 2(\lg 10 - \lg 2) = 2(2B - A + 1)$. b) $\lg_{60} 24 = \frac{\lg 24}{\lg 60} = \frac{3A + B}{A + B + 1}$. d) $\log_{27}(\lg 150)^3 = \log_3(\lg 150)$ și rezultă că $3^{\log_3(\lg 150)} = \lg 150$ etc.

TESTUL 52

I. Se scriu logaritmii în aceeași bază, de exemplu, în baza 5 și rezultă:

$$A = \frac{\frac{1}{2}\log_5 x}{1+\log_5 x} \Rightarrow \log_5 x = \frac{2A}{1-2A}; \quad B = \frac{3}{1+3\log_5 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{3(1-2A)}{1+4A}.$$

II. Se scriu logaritmii în baza a ($a > 0$ și $a \neq 1$) și rezultă egalitatea:

$$\frac{\log_a 3}{\log_a 2}\cdot\frac{\log_a 7}{\log_a 5}\cdot\frac{\log_a 13}{\log_a 11} = \frac{\log_a 13}{\log_a 2}\cdot\frac{\log_a 3}{\log_a 5}\cdot\frac{\log_a 7}{\log_a 11}.$$

III. Se ține seama: $a^{\log_a N} = N$ și $\log_{a^n} N^n = \log_a N$. 1). -7; 2). $\sqrt{b} - \sqrt{a}$; 3). Ținînd seama că $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ relația se mai scrie sub forma:

$$\frac{(\log_b a + 1)^2}{\log_b a}\cdot\left(\frac{1}{\log_b a} - \frac{1}{\log_b a + 1}\right)\cdot\log_b a + \log_a \log_b b^{\frac{1}{a}} = \log_a b.$$

IV. Punînd condițiile de existență rezultă că $x \in (1, \infty)$ și ecuația se poate scrie:

$$\lg(x-1) + \lg(x+3) - 2^{x+3}\lg(x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1 - 2^{x+3})\cdot\lg(x+3)(x-1) = 0.$$

Cum $x = -3$ și $x = -1-\sqrt{5}$ nu convin rezultă că $x = -1+\sqrt{5}$.

TESTUL 53

1. Pentru ca $4x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 4 > 0$, $(\forall) x \in R$ trebuie ca $\Delta < 0$. **2.** Se știe că $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4) \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 1$ și $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 4 < 1$, iar $\log_2(x^2-9) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 9 \geqslant 1$ și $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-9) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 9 < 1$.

Avem:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-2		2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$		$-$	0	$+$		▨▨▨		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{10}$		-3		3		$\sqrt{10}$		$+\infty$
$\log_2(x^2-9)$		$+$	0	$-$		▨▨▨		$-$	0	$+$	

3. $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \lg(n+a+1)(n+b+1) =$

$$= \lg\frac{(a+1)(b+1)}{(a+2)(b+2)} + \lg\frac{(a+2)(b+2)}{(a+3)(b+2)} + \ldots +$$

$$+ \lg\frac{(a+n)(b+n)}{(a+n+1)(b+n+1)} + \lg[(n+a+1)(n+b+1)] =$$

$$= \lg[(a+1)(b+1)] - \lg[(a+2)(b+2)] + \lg[(a+2)(b+2)] -$$
$$- \lg[(a+3)(b+3)] + \ldots + \lg[(a+n)(b+n)] - \lg[(a+$$
$$+n+1)(b+n+1)] + \lg[(a+n+1)(b+n+1)] = \lg[(a+$$
$$+1)(b+1)].$$

4. a) $S = \log_2\left(1-\frac{1}{2}\right) + \log_2\left(1-\frac{1}{3}\right) + \ldots +$

$$+ \log_2\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log_2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{n-1}{n}\right) = -\log_2 n;$$ sau, altfel scris:

$$S = \sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1-\frac{1}{k}\right) = \log_2\prod_{k=2}^{n}\log_2\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\log_2 n.$$

b) $S = \sum_{k=1}^{n}\log_4\frac{(k+1)(k+3)}{k(k+4)} = \log_4\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+3}{k+4} =$

$= \log_4\frac{4(n+1)}{n+4} = 1 + \log_4\frac{n+1}{n+4}$. c) $S = 1 + \log_{\frac{1}{2}}\frac{n+2}{n+1}$.

5. Se logaritmează ambii membri ai egalității și se ține seama de proprietățile logaritmilor.

TESTUL 54

1. $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = -1$. **2.** $x = 4$. **3.** Ecuația se scrie: $3 \cdot 2^x + (2^x)^2 = 28$ și se notează $2^x = y$. **4.** $x = 4$. **5.** Se dă factor comun 3^{x-4} și se obține: $3^{x-4}(3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 3^0) = 364 \Rightarrow x = 4$. **6.** Se observă că $(4 + \sqrt{15})^x = \frac{1}{(4 - \sqrt{15})^x}$ și atunci ecuația se scrie $(4 + \sqrt{15})^x + \frac{1}{(4 + \sqrt{15})^x} = 62$; sau notînd $(4 + \sqrt{15})^x = y$ avem: $y^2 - 62y + 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_{1,2} = 31 \pm 8\sqrt{15} \Rightarrow y_1 = 31 + 8\sqrt{15}$; dar $31 + 8\sqrt{15} = (4 + \sqrt{15})^2$ deci $(4 + \sqrt{15})^x = (4 + \sqrt{15})^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 2$ și $y_2 = (4 - \sqrt{15})^2$ deci $(4 + \sqrt{15})^{-2} = (4 + \sqrt{15})^x \Rightarrow x = -2$.

7. $x = -\frac{1 - \log_5^4}{1 - \log_5^3}$. **8.** $8^x \neq 0$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$. **9.** Se observă că $x = 2$ este rădăcină a ecuației. În continuare se va demonstra că aceasta este unică. Într-adevăr, se presupune că ecuația mai admite și rădăcina $x^1 = 2 + \alpha$, $\alpha \in R$, atunci:
$3^{x^1} + 4^{x^1} = 5^{x^1} \Rightarrow 3^{2+\alpha} + 4^{2+\alpha} = 5^{2+\alpha} \Rightarrow 3^2 \cdot 3^\alpha + 4^2 \cdot 4^\alpha - 5^2 \cdot 5^\alpha = 0 \Rightarrow 9 \cdot 3^\alpha + 16 \cdot 4^\alpha - 25 \cdot 5^\alpha = 0 \Rightarrow 9 \cdot 3^\alpha + 16 \cdot 4^\alpha - 9 \cdot 5^\alpha - 16 \cdot 5^\alpha = 0 \Rightarrow 9(3^\alpha - 5^\alpha) + 16(4^\alpha - 5^\alpha) = 0$ (1).

Dacă $\alpha > 0$ atunci $9(3^\alpha - 5^\alpha) < 0$ și $16(4^\alpha - 5^\alpha) < 0$, iar suma a două numere negative nu poate să fie zero și atunci relația (1) nu poate să aibă loc, adică $x^1 = 2 + \alpha$ nu este rădăcină dacă $\alpha > 0$. În cazul $\alpha < 0$ rezultă că $9(3^\alpha - 5^\alpha) > 0$ și $16(4^\alpha - 5^\alpha) > 0$, deci nici în acest caz egalitatea (1) nu este adevărată. Deci ecuația nu admite altă soluție în afară de $x = 2$. **10.** Analog se arată că $x = 6$ este soluție unică.

TESTUL 55

Mai întîi trebuie să fie determinată mulțimea valorilor lui x pentru care logaritmii există. Se recomandă de asemenea să fie verificate soluțiile găsite:

1. $x = \frac{3}{2}$. 2. $x = 2$. 3. $x = 10^{\frac{10}{3}}$ și $x = 10^{-3}$. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. 6. $x = 2$. 7. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

TESTUL 56

1. a) Se notează $\log_{a^n} b^n = t \Rightarrow b^n = a^{nt}$. Logaritmînd în baza a se obține $n \log_a b = nt \Rightarrow \log_a b = t = \log_{a^n} b^n$. Folosind relația stabilită ecuația propusă se scrie: $\log_3 x^2 = 4 \Rightarrow x = 9$. 2. a) Se pun condițiile:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (3, +\infty), \quad \text{iar}$$

$$E_1(x) - E_2(x) = \lg \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} \Rightarrow \lg \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 102x + 297 = 0 \Rightarrow x_1 = 99 \text{ și } x_2 = 3 \notin (3, +\infty).$$

Sau se scrie:

$$\lg \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lg \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3} = \lg (x + 1) \text{ etc.}$$

b) $E_1(x) > E_2(x) \Leftrightarrow E_1(x) - E_2(x) > 0 \Leftrightarrow \lg \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} >$

$$> 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} > 1 \\ \text{și} \\ x \in (3, \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (3, +\infty).$$

3. Mai întîi se pune condiția ca:

$$\frac{\log_2^2 x - 1}{\log_2^2 x - 2 \log_2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1] \cup (2, +\infty) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, 2] \cup (4, +\infty)$, iar $E(x) = 1 \Leftrightarrow \log_2^2 x -$

$$- 1 = \log_2^2 x - 2 \log_2 x \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

4. Ţinînd seama că

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2^x} \text{ rezultă } E = \sqrt{(y-1)^2} - \sqrt{(1+y)^2} =$$

$$= \begin{cases} -2y \text{ dacă } y \in (-\infty, -1) \\ 2 \text{ dacă } y \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 2y \text{ dacă } y \in (1, +\infty), \end{cases}$$

unde $y = \log_2 x$. Deci

$$E = 2 \Leftrightarrow y \in [-1, 0) \cup (0, 1] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2].$$

5. Se scriu logaritmii în baza a şi ecuaţia devine:

$$|\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = 2a\sqrt{\log_a x}.$$

Dacă $a \in (0, 1) \Rightarrow |\log_a x + 1| =$

$$= \begin{cases} \log_a x + 1 \text{ pentru } x \in \left(0, \frac{1}{a}\right] \\ -(\log_a x + 1) \text{ pentru } x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right) \end{cases}$$

iar

$$|\log_a x - 1| = \begin{cases} \log_a x - 1 \text{ pentru } x \in (0, a] \\ -(\log_a x - 1) \text{ pentru } x \in (a, +\infty) \end{cases}$$

şi cînd: $x \in (0, a] \Rightarrow x = a^{a^2} \notin (0, a]$; $x \in (a, 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = a^{\frac{1}{a^2}} \notin (a, 1)$; $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right) \Rightarrow \log_a x < 0$ şi $\sqrt{\log_a x}$ nu este definit. Aşadar, în cazul în care $a \in (0, 1)$ ecuaţia nu admite soluţie.

Dacă $a \in (1, +\infty)$ se explicitează modulele şi rezultă în final:

$$x_1 = a^{a^2} \text{ şi } x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}.$$

TESTUL 57

1. Se știe că $\log_a N$ se scrie în noua bază b astfel:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \quad \text{a) Astfel } \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x};$$

$$\log_{4x} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 4x} = \frac{1}{\log_2 4 + \log_2 x} = \frac{1}{2 + \log_2 x};$$

$$\log_{2x} 2 = \frac{1}{1 + \log_2 x}.$$

Înlocuind în ecuație se obțin rădăcinile:

$$x_1 = 2^{\sqrt{2}}, \quad x_2 = 2^{-\sqrt{2}}.$$

c) Se stabilește mai întîi că $x \in (-3, -2) \cup (-2, 4)$, apoi se scriu toți logaritmii în baza 2 și ecuația devine:

$$\log_2 6 - \log_2(4 - x) = \log_2(3 + x) \Rightarrow (3 + x)(4 - x) = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 3 \text{ și } x_2 = -2 \notin (-3, -2) \cup (-2, +4).$$

2. a) Ecuația se scrie: $x^2 - 3mx + m^2 = 0$. $(\Delta > 0) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{m(3 \pm \sqrt{5})}{2}$, rădăcini care sînt pozitive pentru $m > 0$. b) O ecuație $f(x) = 0$ are o rădăcină în intervalul (a, b) dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$ de unde rezultă că $m \in \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$. c) Se alcătuiește tabelul:

x	$-\infty$		-3		$-2\sqrt{2}$		2		$2\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$\log_3(x^2 - 8)$		+	0	−		nedefinit				−	0	+	
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 5x + 7)$		−		−		−	0	+		+	0	−	
$E(x)$		−	0	+						−		−	

Pentru $x \in (-3, -2\sqrt{2}) \Rightarrow E(x) > 0$ și pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (2\sqrt{2}, 3) \cup (3, +\infty) \Leftrightarrow E(x) < 0$. Pentru $x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ expresia nu este definită. **3.** Logaritmii sînt definiți pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, \infty)$ Deoarece $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} > \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 1}$ și în final $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

TESTUL 58

1. a) Ecuația se mai scrie:

$$2^{2x} + 2^x \cdot 3^x = 3^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0.$$

Se notează

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Cum funcția exponențială ia valori în R_+ înseamnă că $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = y_2 < 0$, nu este admis.

b) Se împarte prin $4^{\frac{1}{x} + x}$ și se notează $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x} + x} = y$. În final se obțin $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$. c) Se înmulțește ecuația cu $9^{\frac{1}{x}}$ și se notează $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = y$. În final rezultă

$$x = \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

2. a) $x = 4$, $y = 3$. b) $x_1 = 12$ și $y_1 = 10$ sau $x_2 = -10$ și $y_2 = -12$. c) $x = 10^2$ $y = 10$. d) $x = \sqrt[3]{10}$, $y = 10\sqrt[3]{100}$. e) $x = 3^{-1}$, $y = 3^{-1}$.

TESTUL 59

I. 1) Punînd condițiile de existență rezultă: $x \in (1, \infty)$ și se poate scrie $(x-1)^4 = 16 \Rightarrow x = 3$. 2) $x = a$. 3) Punînd condițiile de existență rezultă: $x \in (4, \infty)$ și se scrie: $(x-2)(x-3)(x-1)(x-4) = 120 \Leftrightarrow (x^2-5x+4) \cdot [(x^2-5x+4)+2] - 120 = 0 \Rightarrow x = 6$.

II. Deoarece $3^x - 2 > 0$ rezultă că $x > \log_3 2$. Notînd $3^x - 2 = y$ se obține: $\log_{\sqrt{2}} y\left(\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} y\right) > 2 \Leftrightarrow -(\log_{\sqrt{2}} y)^2 + 3\log_{\sqrt{2}} y - 2 > 0 \Leftrightarrow 1 < \log_{\sqrt{2}} y < 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < y < 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 3^x - 2 < 2 \Leftrightarrow \log_3(2+\sqrt{2}) < x < \log_3 4$.

III. Punînd condițiile de existență rezultă că numerele x și y sînt numere reale pozitive și diferite de unu. Soluția va fi:

$$x = 10^{\frac{2m(mn+1)}{n(m+n)}}; \quad y = 10^{\frac{2n(mn+1)}{m(m+n)}}.$$

TESTUL 60

I. Sînt 24 posibilități. **II.** Se pot lua 32 de decizii fiindcă elevul poate fi fată sau băiat și poate fi de la unul din cele patru licee. **III.** Numărul minim de „broaște" este egal cu numărul grupurilor de cîte trei, ce pot fi formate din cei 5 membri ai comisiei, adică C_5^3. Deoarece pentru fiecare „broască" sînt necesare 3 chei, înseamnă că fiecare membru al comisiei va avea cîte 6 chei.

TESTUL 61

I. 2. a) $n+2$; b) n^2; c) după simplificări rezultă

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - n = n^2;$$

d) Se ajunge la calculul sumei

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

II. $\frac{(2n)!}{n!2^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots(2n)}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)(2\cdot 2\ldots 2)} =$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1).$$

III. a) $x=5$; b) $x=3$; c) $x\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

TESTUL 62

I. 1) 12; 2) 36; 3) 6; 4) 18. În cazul general dacă mulțimea M este formată din n elemente și se formează submulțimi ordonate de cîte k elemente, $k\leqslant n$ atunci se obține: 1) A_{n-1}^{k-1}; 2) $k\cdot A_{n-1}^{k-1}$; 3) $A_{n-2}^{k-2}\cdot 2!$; 4) $k(k-1)\ A_{n-2}^{k-2}$.

II. 1) $n-1$; 2) 1; 3) A_{n-2}^{k+1}. **III.** 1) $x=9$. **IV.** Se poate scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(k+2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}.$$

TESTUL 63

II. 1) $x=8$; 2) $x=8$; 3) $x=5$; 6) $x\in\{3, 4, 5, 6\}$.
III. Se impun condițiile:

$$\begin{cases} x\in N \\ 5x-x^2+5\geqslant x \end{cases} \Rightarrow x\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

iar soluția ecuației este $x=3$.

TESTUL 64

I. Se știe că $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n$ și atunci $(2x+1)! = 1\cdot 2\ldots x(x+1)\ldots(2x-1)(2x)(2x+1) = (2x-1)!\ 2x\cdot(2x+1)$, iar $(2x+2)! = 1\cdot 2\ldots x(x+1)\ldots(2x)(2x+1)(2x+2) = (2x)!\ (2x+1)(2x+2)$.

Ținînd seama de cele de mai sus ecuația devine: $(2x + 1)^2 - 11^2 = 0 \Rightarrow x = 5$.

2. Sînt cunoscute formulele: $P_n = n!$, $A_n^k = n(n - 1) \dots (n - k + 1)$ sau

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}; \quad k \leqslant n, \ k \in N, \ n \in N, \text{ sau } A_n^k =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \text{ și } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

a) Ținînd cont de formulele de mai sus, după calcule se ajunge la ecuația $x^2 - 10x + 9 = 0$ și cum $x \geqslant 6$ rezultă $x = 9$. b) $x = 10$. c) $x = 3$ și $x = 1$. d) **Ați pus condițiile de existență?**

3. a) Se poate scrie:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} =$$

$$= \frac{n-1)!(n-k)}{(n-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!\,k}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{(n-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{(n-1)!n}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

b) Se calculează fiecare termen separat, de exemplu:

$$\frac{C_n^k}{C_n^k + C_n^{k+1}} = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!k!}}{\dfrac{n!}{(n-k)!k!} + \dfrac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}} =$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}}{\dfrac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(n-k)!\,(k+1)!}} = \frac{n!}{\dfrac{n!(n-k+k+1)}{k+1}} =$$

$$= \frac{k+1}{n+1}; \quad \frac{C_n^{k+2}}{C_n^{k+2} + C_n^{k+3}} = \frac{k+3}{n+1},$$

iar

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^{k+1}+C_n^{k+2}}=\frac{k+2}{n+1}.$$

Altfel, se observă că:

$$C_p^{r+1}=\frac{p!}{(r+1)!\,(p-r-1)!}=\frac{p!}{(r+1)!\,(p-r-1)!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(p-r)}{(p-r)}=\frac{p!}{r!(p-r)!}\cdot\frac{p-r}{r+1}=C_p^r\cdot\frac{p-r}{r+1}$$

şi atunci pentru $p=n$ şi $r=k$ se obţine:

$$\frac{C_n^k}{C_n^k+C_n^{k+1}}=\frac{C_n^k}{C_n^k+C_n^k\cdot\dfrac{n-k}{k+1}}=\frac{C_n^k}{\left(1+\dfrac{n-k}{k+1}\right)C_n^k}=$$

$$=\frac{k+1}{n+1}\ \text{etc.}$$

TESTUL 65

1. a) Se observă că:

$$\prod_{k=1}^{n}a^{\frac{k}{(k+1)!}}=a^{\frac{1}{2!}}\cdot a^{\frac{2}{3!}}\cdot a^{\frac{3}{4!}}\dots a^{\frac{n}{(n+1)!}}=$$

$$=a^{\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+}=a^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}}.$$

Suma $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$ este calculată în testul 154, exerciţiul 1. b) Suma este calculată în testul 152, exerciţiul 8.

2. a) Cum $P_{x-y}=(x-y)!$; $P_{x-1}=(x-1)!$ $A_{x-1}^{y-1}=$

$$=\frac{(x-1)!}{(x-y)!}.$$

$$C_{x+1}^{y}=\frac{(x+1)!}{(x-y+1)!\,y!};\quad C_x^{y+1}=\frac{x!}{(x-y-1)!\,(y+1)!}$$

sistemul se scrie:

$$\begin{cases} x \cdot \dfrac{(x-1)!}{(x-y)!} \cdot (x-y)! = 15(x-1)! \\ 9 \cdot \dfrac{(x+1)!}{(x-y+1)!\,y!} = 16 \cdot \dfrac{x!}{(x-y-1)!\,(y+1)!} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ \dfrac{9(x+1)}{(x-y)(x-y+1)} = \dfrac{16}{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 7 \end{cases}$$

S-au folosit relațiile: $(x-y+1)! = (x-y-1)!\,(x-y)(x-y+1)$; $(y+1)! = y!(y+1)$ și s-a ținut cont de condiția $x-y>1$. b) $x=8$, $y=3$.

3. Se observă că:

$$S_p = \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+p}{(n+p+1)!}.$$

Termenul $\dfrac{n+k}{(n+k+1)!}$ se mai scrie:

$$\frac{n+k}{(n+k+1)!} = \frac{1}{(n+k)!} - \frac{1}{(n+k+1)!}.$$

Dînd lui k valorile 0, 1, 2, 3 ... p, și însumînd membru cu membru, se obține

$$S_p = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+p+1)!}.$$

TESTUL 66

1. $\dfrac{A_8^2 \cdot A_5^2}{A_{13}^1}$. **2.** $\dfrac{C_{10}^3}{C_{15}^3} + \dfrac{C_5^3}{C_{15}^3} = \dfrac{2}{7}$. **3.** $P_5 = 5! = 120$.

4. 3 999 960.

5. a) Se ține seama că:

$$\sum_{k=3}^{n} C_k^3 = C_{n+1}^4 \text{ și } \sum_{k=4}^{n} C_k^4 = C_{n+1}^5.$$

b) Se calculează fiecare termen în parte — vezi testul 56.

TESTUL 67

4. Se verifică egalitatea pentru $n = 1$. Presupunînd că

$$S_n(p) = \frac{p}{1-p^2} + \ldots + \frac{p^{2^{n-1}}}{1-p^{2^n}} = \frac{1}{1-p}\cdot\frac{p-p^{2^n}}{1-p^{2^n}}$$

este adevărată, trebuie arătat că:

$$S_{n+1}(p) = \frac{1}{1-p}\cdot\frac{p-p^{2^{n+1}}}{1-p^{2^{n+1}}}. \text{ Dar } S_{n+1}(p) = S_n(p) +$$

$$+ \frac{p^{2^n}}{1-p^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1-p}\cdot\frac{p-p^{2^n}}{1-p^{2^n}} + \frac{p^{2^n}}{1-p^{2^{n+1}}} =$$

$$= \frac{1}{1-p}\cdot\frac{p-p^{2^{n+1}}}{1-p^{2^{n+1}}}.$$

5. Pentru $n = 1$, egalitatea este evidentă. Presupunînd că relația din enunț este adevărată trebuie arătat că:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\ldots\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)}.$$

Ținînd seama de enunț trebuie arătat că:

$$\frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)}.$$

7. Pentru $n = 1$ avem: $4\cdot 1 - 2 = 1 + 1$. Presupunem că $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = (n+1)\ldots(n+n)$ este adevărată.

Atunci: $[4(n+1)-2]\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = (4n+2)(n+1)\ldots(n+n) = (n+2)\ldots[(n+1)+(n-1)]\cdot(4n+2) = (n+2)\ldots[(n+1)+(n-1)]\cdot[(n+1)+n]\cdot[(n+1)+(n+1)]$.

TESTUL 68

1. a) Se scrie: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$. b) Din $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n$

rezultă, folosind și suma coeficienților binomiali, că: $1 + C_n^2 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}$. c) Se amplifică ambii membri ai egalității cu $n!$ și se obține:

$$\frac{n!}{1!\,(n-1)!} + \frac{n!}{3!\,(n-3)!} + \frac{n!}{5!\,(n-5)!} + ... + \frac{n!}{(n-1)!\,1!} =$$

$= 2^{n-1}$, relație adevărată conform punctului b):

$$\left(C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!};\ C_n^3 = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} \text{ etc.}\right).$$

2. a) Se observă că $3^n = (2+1)^n = 2^n + 2^{n-1}C_n^1 + + 2^{n-2}C_n^2 + ... + 2^{n-n}C_n^n$. Scriind formulele combinărilor $\left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$ și împărțind prin $n!$ se obține egalitatea cerută. b) Se procedează analog, pornind de la: $1 = = (2-1)^n = 2^n - 2^{n-1}C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n \cdot 2^0$ etc.

3. Se calculează: $$\frac{x+1}{x-1} = \frac{\dfrac{2^n + 2^{n-1}C_n^1 + ... + C_n^n}{2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + ...}}{\dfrac{2^n - 2^{n-1}C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n}{2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + ...}} =$$

$$= \frac{3^n}{1} = 3^n.$$

Rezultă că $E = \sqrt[n]{3^n} = 3$. **4.** a) Din egalitatea $(1+x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + ... C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$ rezultă: $\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2} x^2 + ... + \frac{C_n^n}{n+1} x^{n+1}$ și făcînd pe $x = 1$ se obține relația cerută. b) Se amplifică cu $(n!)^2$ membrul stîng al egalității și se obține:

$$\frac{1}{(n!)^2} \sum_{x=0}^{n} \frac{[n!]^2}{(x!)^2\,[(n-x)!]^2} = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{x=0}^{n} (C_n^x)^2 = \frac{1}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^4}.$$

S-a folosit relația $\sum_{x=0}^{n} (C_n^x)^2 = C_{2n}^n$ (vezi testul 69).

TESTUL 69

1. Avem: $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!n!(n+1)}=\frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)}$.

Dar $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ este coeficientul lui x^n din dezvoltarea $(x+1)^{2n}$ și fiindcă $(2n)!$ se divide prin $(n+1)$ rezultă că numărul dat este întreg. 2. Se consideră identitatea $(x+a)^n\cdot(x+a)^n=$ $=(x+a)^{2n}\Rightarrow(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$. 3. a) Se consideră identitatea: $(x+a)^n\,(x+a)^n=(x+a)^{2n}$. Se calculează coeficientul lui x^{n+p} din ambii membri și se egalează. b) Se folosesc dezvoltările: $(1+x)^n=C_n^0+$ $+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n$ și $(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+\ldots+$ $+(-1)^nC_n^nx^n$. 4. a) Conform enunțului avem: $C_n^{n-1}=18\Rightarrow$ $\Rightarrow n=18$. Deci dezvoltarea are 19 termeni. b) Se folosește formula termenului general $T_{k+1}=(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k$, care în acest caz devine: $T_{8+1}=(-1)^8C_{18}^8\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a}\right)^{18-8}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt[4]{x}}\right)^8=$ $=C_{18}^8\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{a^2}$. c) Se egalează exponentul lui x din formula termenului general cu -1. Adică:

$$T_{k+1}=(-1)^kC_{18}^k\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a}\right)^{18-k}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=(-1)^kC_{18}^k\,\frac{x^{\frac{18-k}{3}-\frac{k}{4}}}{a^{18-2k}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\frac{18-k}{3}-\frac{k}{4}}=x^{-1}\Rightarrow\frac{18-k}{3}-\frac{k}{4}=-1\Rightarrow k=12 \text{ deci}$$

$$T_{13}=C_{18}^{12}\,a^6\cdot x^{-1}.$$

TESTUL 70

1. Condiția din enunț este: $C_{48}^{r^2-1}=C_{48}^{5r-1}\Leftrightarrow r^2-1=$ $=5r-1\Rightarrow r=5$ (sau $r^2-1+5r-1=48$) deci $T_{4+1}=C_{48}^4\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{44}:x^4=C_{48}^4\,\frac{x^4}{x^{11}}=C_{48}^4x^{-7}$. 2. Se știe

că $T_{3+1} = 200 \Leftrightarrow C_6^3 \cdot x^{\frac{3}{2(1+\lg x)}} \cdot x^{\frac{3}{12}} = 200 \Leftrightarrow 20x^{\frac{3}{2(1+\lg x)}+\frac{1}{4}} =$
$= 200 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2(1+\lg x)}+\frac{1}{4}} = 10 \Leftrightarrow \left[\frac{3}{2(1+\lg x)} + \frac{1}{4}\right] \cdot \lg x =$
$= \lg 10 \Leftrightarrow \frac{3\lg x}{2+2\lg x} + \frac{\lg x}{4} = 1 \Leftrightarrow 6\lg x + \lg x + \lg^2 x =$
$= 4 + 4\lg x \Leftrightarrow \lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0$ etc. **3.** Cum $C_n^0 + C_n^1 +$
$+ \ldots + C_n^n = 2^n \Rightarrow n = 7$ din condiția $C_7^5 \left(x^{\frac{1}{2}\log_a x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \frac{21}{a^5}$
rezultă $x_1 = a^4$ și $x_2 = a$; $a > 0$, $a \neq 1$. **4.** $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n =$
$= 22$; $\Rightarrow n = 6$. $C_6^2\, 2^{2x} \cdot \frac{1}{2^{x-1}} + C_6^4\, 2^x \cdot \frac{1}{2^{2x-2}} = 135$. În final
ecuația se scrie $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$, $x_2 = 2$.

TESTUL 71

1. a) Amplificînd fiecare fracție cu conjugata numitorului se obține:

$$S_n = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} =$$
$$= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{r} =$$
$$= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{r} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

b) În formula $a_{p+k} = a_k + p \cdot r$ dăm lui k valorile 1, 2, 3, ... q și adunînd membru cu membru se obține:

$$a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+q} = a_1 + a_2 + \ldots + a_q + pqr.$$

Dar $a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+q} = S_{p+q} - S_p$ deci $S_{p+q} =$ $= S_p + S_q + pqr$. Din formulele $S_p = \frac{a_1 + a_p}{2} p$, $S_q =$ $= \frac{a_1 + a_q}{2} q \Rightarrow \frac{2S_p}{p} - \frac{2S_q}{q} = a_p - a_q = (p - q)r$, sau $\frac{2(qS_p - pS_q)}{p - q} = pqr$. În final $S_{p+q} = \frac{p+q}{p-q}(S_p - S_q)$.

c) Din condiția dată rezultă că $\frac{a_1 + a_p}{a_1 + a_q} = \frac{p}{q}$ adică $\frac{2a_1 + (p-1)r}{2a_1 + (q-1)r} = \frac{p}{q}$ deci $2a_1(q-p) + [(p-1)q - (q-1)p]r = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{r}{2} \Rightarrow a_p = a_1 + (p-1)r = \frac{2p-1}{2} r$, adică $\frac{a_p}{a_q} = \frac{2p-1}{2q-1}$. d) $r = a_2 - a_1 = a_2 \Rightarrow a_m = a_1 + (m-1)r = r(m-1)$. Cu acestea se poate scrie: $S = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{n-1}{n-2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n-3}\right) = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k+1}{k} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-2} = n - 2 + \frac{1}{n-2} = \frac{(n-2)r}{r} + \frac{r}{(n-2)r} = \frac{a_{n-1}}{a_2} + \frac{a_2}{a_{n-1}}$.

2. $\div$ 9, 19, 29, ..., 99, 109 sau $\div$ 109, 99, ..., 29, 19, 9.

TESTUL 72

1. $\div$ 5, 30, 55. **2.** Relația se mai poate scrie: $a_k - a_{k-1} = a_{k-1} - a_{k-2}$ și se notează cu r valoarea comună. Rezultă că $a_k = a_{k-1} + r$; $a_{k-1} = a_{k-2} + r \Rightarrow a_k = a_{k-2} + 2r$. **3.** 6; 8. **4.** $\div\div$ 4, 12, 36.

TESTUL 73

1. a) În formula $S_p = \frac{a_p q - a_1}{q-1}$ se înlocuiește p cu 1, 2 ... n și se obține: $S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{a_1 q - a_1}{q-1} + \frac{a_2 q - a_1}{q-1} + \ldots + \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{q-1} \cdot q - \frac{a_1 n}{q-1} = \frac{(a_n q - a_1)q}{(q-1)^2} - \frac{a_1 n}{q-1}$.

b) Se scrie:

$$\frac{1}{a_1^2-a_2^2}+\frac{1}{a_2^2-a_3^2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}^2-a_n^2}=$$

$$=\frac{1}{1-q^2}\left[\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}^2}\right]=\frac{1}{1-q^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\frac{1}{a_{n-1}^2}\cdot\frac{1}{q^2}-\frac{1}{a_1^2}}{\frac{1}{q^2}-1}=\frac{(a_1^2-a_n^2)q^2}{a_1^2a_n^2(1-q^2)^2}.$$

c) $$\frac{1}{a_1^k+a_2^k}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}^k+a_n^k}=\frac{q^k}{1-q^{2k}}\cdot\frac{a_1^k-a_n^k}{a_1^k\cdot a_n^k}.$$

2. Cum $S=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}$ şi $S'=\dfrac{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{q}-\frac{1}{a_1}}{\frac{1}{q}-1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{S}{S'}=a_n\cdot a_1\Rightarrow P=\left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

TESTUL 74

1. Deoarece evenimentele A şi B nu se pot produce simultan înseamnă că evenimentele sînt incompatibile. A şi B sînt evenimente compuse. **2.** a) Se notează cu S evenimentul care constă în apariţia stemei şi cu F apariţia celeilalte feţe. Cîmpul conţine 2^2 evenimente şi este $\{\emptyset, F, S, \{F, S\}\}$. b) Sînt $1+\sum_{s=1}^{6} C_6^s=64$ evenimente. $\{\emptyset, \{k\}, \{i, j,\}$ $\{i, j, k\}, \{i, j, k, l\}, \{i, j, k, l, m\}, E\}$.

3. Mai întîi se scriu cazurile favorabile pentru fiecare punct în parte. De exemplu pentru c) cazurile favorabile sînt 3, 6, 9, 12, 15, adică sînt 5 cazuri. Deci $P=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

4. Este mai ușor să se calculeze probabilitatea evenimentului contrar, adică a evenimentului ca aruncînd de 10 ori două zaruri să nu apară niciodată dubla unu. Cazuri posibile sînt $(36)^{10}$, iar cazuri favorabile $(35)^{10}$. Deci probabilitatea evenimentului contrar este $\left(\frac{35}{36}\right)^{10}$. Probabilitatea de apariție cel puțin odată a dublei unu este $P = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10}$.

5. Cazuri posibile de extragere sînt 15, 19, 285. După extragere au rămas în urnă 14 bile albe și 20 bile negre.

TESTUL 75

1. Cazuri posibile sînt $15 + 10 = 25$, iar favorabile sînt 10. 2. Dacă A_1 și A_2 sînt evenimentele ca primul, respectiv al doilea trăgător să nimerească ținta avem: $P(A_1 - A_2) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}7 \cdot 0{,}2$. S-a procedat astfel, fiindcă evenimentele sînt independente. 3. Sîntem în cazul schemei lui *Bernoulli* cu mai multe stări, deci:

$$P(10; 4; 2; 4) = \frac{10!}{4!\,2!\,4!} \cdot \left(\frac{8}{30}\right)^4 \cdot \left(\frac{12}{30}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{30}\right)^4 \text{ etc.}$$

4. Se aplică schema lui *Poisson*. Trebuie determinat coeficientul lui x^2 din polinomul $P(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)$, unde $q_i = 1 - p_i$; $i = 1, 2, 3$, iar $p_1 = \frac{3}{10}$, $p_2 = \frac{8}{11}$, $p_3 = \frac{5}{9}$. 5. Este cazul bilei nerevenite, deci $P_{12, 18}(9, 1) = \frac{C_{12}^{9} C_{18}^{1}}{C_{30}^{10}}$.

6. Se aplică schema bilei nerevenite:

$$P = \frac{C_{10}^{1} C_{30}^{1}}{C_{40}^{2}} + \frac{C_{10}^{2} C_{30}^{0}}{C_{40}^{2}}.$$

TESTUL 76

1. a) $\frac{31}{35}$. b) $\frac{13}{35}$. c) $\frac{5}{7}$. **2.** Probabilitatea este 1.

3. Dacă A_1, A_2, A_3 sînt evenimentele care constau în extragerea unui bilet de algebră, la tragerea 1, 2 respectiv 3, atunci:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) =$$
$$= \frac{10}{22} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20} = \frac{6}{77}. \quad \text{a) } P = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{22}^3}.$$

b) Dacă A_1 este evenimentul ca primul bilet să fie de algebră, A_2 este evenimentul ca cel de al doilea bilet să fie de trigonometrie, A_3 este evenimentul ca cel de al treilea bilet să fie de aritmetică , atunci:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) =$$
$$= \frac{10}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{5}{20} = \frac{5}{135}.$$

4. Se aplică formula lui *Bayes* și se obține $\frac{45}{268}$.

TESTUL 77

1. a) $x^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$. b) $3x \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$.

c) $x^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0,2 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$. d) $M(x) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,5 +$ $+ 3 \cdot 0,3$. e) $M(X^{-1}) = 1 \cdot 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,3$.

f) $D^2(x) = M[X - M(x)]^2$. Se scrie mai întîi tabloul de distribuție al variabilei $[X - M(x)]^2$ și apoi se calculează media acesteia. Altfel: $D_2(X) = M_2(X) - [M(X)]^2 =$ $= M(X^2) - [M(X)]^2 = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,3 - 4,41 = 1,69$.

2. a) Valorile pe care le ia variabila aleatoare $x + y$ sînt: $1 + 1$; $1 + 3$; $1 + 6$; $2 + 1$; $2 + 3$; $2 + 6$; $4 + 1$; $4 + 3$; $4 + 6$, adică: 2; 4; 7; 3; 5; 8; 5; 7; 10; Se calculează

pe rînd probabilitățile de obținere a fiecărei valori, ținînd cont că variabilele sînt independente.

$P(x+y=2) = P[(x=1) \cap (y=1)] = P(x=1) \cdot P(y = 1) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$

$P(x+y=4) = 0{,}06$; $P(x+y=7) = 0{,}02$; $P(x+y = 3) = 0{,}14$; $P(x+y=5) = 0{,}42$;

$P(x+y=8) = 0{,}14$; $P(x+y=5) = 0{,}04$; $P(x+y = 7) = 0{,}12$; $P(x+y=10) = 0{,}04$.

Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare $x+y$ arată astfel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 10 \\ 0{,}02 & 0{,}14 & 0{,}06 & 0{,}42 & 0{,}02 & 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

b) Valorile pe care le ia variabila aleatoare $x - y$ sînt:

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1; & 1\cdot 3; & 1\cdot 6; & 2\cdot 1; & 2\cdot 3; & 2\cdot 6; & 4\cdot 1; & 4\cdot 3; & 4\cdot 6 \\ 1; & 3; & 6; & 2; & 6; & 12; & 4; & 12; & 24 \end{pmatrix}$$

adică sînt:

$P(xy=1) = P[(x=1) \cap (y=1)] = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$

$P(xy=3) = 0{,}06$; $P(xy=6) = 0{,}02$; $P(xy=2) = 0{,}14$; $P(xy=6) = 0{,}42$;

$P(xy=12) = 0{,}14$; $P(xy=4) = 0{,}04$; $P(xy=12) = 0{,}12$; $P(xy=24) = 0{,}04$.

Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare xy va fi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 12 & 24 \\ 0{,}02 & 0{,}14 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}02 & 0{,}12 & 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

3. Cum $D^2(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 \Rightarrow M(x^2) = D^2(x) \Leftrightarrow [M(x)]^2 = \frac{15}{4}$, de unde rezultă sistemul:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 = \frac{7}{4} \\ p_1 + 4p_2 + 9p_3 = \frac{15}{4} \end{cases}$$

cu soluția: $p_1 = \frac{1}{2}$; $p_2 = \frac{1}{4}$; $p_3 = \frac{1}{4}$.

TESTUL 78

2. Tabloul de distribuție al variabilei alcatoare atașată experienței de determinare a coeficienților este:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Variabilele x_1, x_2, x_3 corespunzătoare determinării coeficienților a, b, c sînt independente. a) Condiția ca ecuația să aibă rădăcini egale este ca $\Delta = 0$, deci se calculează $P(x_2^2 - 4x_1x_2 = 0) = \frac{5}{6^3}$. b) Ecuația are rădăcini distincte dacă $\Delta \neq 0$ deci $P(x_2^2 - 4x_1x_2 = 0) \neq 1 - P(x_2^2 - 4x_1x_2 = 0) = 1 - \frac{5}{6^3}$. c) Se calculează $P[(x_1 + x_2 = 5) \cap (x_1x_2) = 6]$.

TESTUL 79

I. Fie cele două numere a și b, cîturile $q_1 = q_2$ și resturile r_1 și r_2. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} a - b = 15 \\ a = 16q_1 + r_1 \Rightarrow a = 48 + r \text{ și } b = 33 + r;\ r \in N,\ 1 \leqslant r < 10 \\ b = 11q_2 + r_2 \end{cases}$$

II. Se aplică teorema împărțirii cu rest pentru numere întregi.

1) $\begin{cases} a + b = 970 \\ a = 68 \cdot b + 4 \end{cases} \Rightarrow a = 956;\quad b = 14.$

2) $a = 956;\quad b = -14;$ 3) $a = -956;\quad b = 14.$

4) $a = -956;\quad b = -14.$

III. 1) $N = (2k)^2 = 4k'$; $N = (2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1 = 8k' + 1$. 2) Fie $N = n^2$. Numărul n poate avea una din formele: $n = 16k \pm r$, unde $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și rezultă că $N = 16k' \pm r'$ cu $r' \in \{0, 1, 4, 9\}$. **IV.** Deoarece $8 = 3 + 5$; $9 = 3 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$ rezultă că orice număr natural $n > 10$ are una din formele $n = 8 + 3k$; $n = 9 + 3k$; $n = 10 + 3k$.

TESTUL 80

I. 4) Fie cele patru numere consecutive: a, $a+1$, $a+2$, $a+3$. Atunci vom avea: $a(a+3)(a+1)(a+2) = (a^2+3a+1-1)(a^2+3a+1+1) = (a^2+3a+1)^2 - 1$, care nu poate fi pătrat perfect. **II.** 2) Numărul n poate avea una din formele $3k$, $3k+1$, $3k-1$ și prin substituire rezultă că unul din factorii expresiei va fi multiplu de 3. 3) Se mai poate scrie: $n^3+3n^2+3n^2+2n+9n+6 = (n+1)(n+2)(n+3)$. 4) Factorul $n(n+1)$ arată că expresia este divizibilă cu 2. Pentru a arăta că este divizibiă cu 3 se consideră cazurile $n=3k$, $n=3k+1$ și $n=3k+2$. 5) Se mai poate scrie: $n^5-n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Primii trei factori arată că expresia este divizibilă cu 6. În continuare se consideră cazurile: $n=5k$; $n=5k\pm 1$; $n=5k\pm 2$. **III.** 1) și 2). Se fac descompunerile în factori și se consideră $n=2k+1$. 3) Deoarece $n^8(n^4-1)-(n^4-1) = (n^4+1)(n^2+1)(n^2+1)(n+1)(n+1)(n-1)^2$ și $512 = 2^9$, n este număr impar, rezultă că n^4 și n^2 sînt tot numere impare. **IV.** Fie cele opt numere consecutive: n; $n+1$; $n+2$; $n+3$; $n+4$; $n+5$; $n+6$; $n+7$. Deci $N = (n^2+7n)\cdot(n^2+7n+6)\cdot(n^2+7n+10)\cdot(n^2+7n+12)$ sau $N = (a-6)\cdot a\cdot(a+4)\cdot(a+6) = a^4+4a^3-36a^2-144a$ unde s-a notat $n^2+7n+6 = a$. Dar $(a^2+2a-21)^2 < N < (a^2+2a-20)^2$ pentru $a \geqslant 100$. Deci N nu poate fi pătrat perfect pentru $n^2+7n+6 \geqslant 100$, adică pentru $n > 6$.

TESTUL 81

I. 1) Dezvoltînd după binomul lui *Newton* se obține:

$81^{125} = 9^{250} = (10-1)^{250} = 10^{250} + \ldots - C_{250}^3 10^3 + C_{250}^2 10^2 - C_{250}^1\cdot 10 + 1 = 10^4 k + 12\,500 - 2\,500 + 1 = 10^4 k + 1$.

Analog se obține:

$$121^{25} = 11^{50} = (10+1)^{50} = 10^3 k' + 1.$$

II. 1) Se aplică metoda inducției matematice; 2) Se scrie: $(95^n-40^n)-(35^n-13^n) = (95-40)\cdot(95^{n-1}+\ldots+40^{n-1})-(35-13)(35^{n-1}+\ldots+13^{n-1}) = 11k$.

Grupînd în alt mod se obține: $(95^n-35^n)-(40^n-13^n) = 3k'$; 3) Se scrie $n^2+3n+4 = (n+5)(n-2)+14$. **III.** 1) Dacă $30 \mid (m^2+n^2)$ rezultă că $30 \mid m^2$ și $30 \mid n^2$

adică $30 \mid m$ și $30 \mid n$ și deci $30 \mid (m + n)$. 2) Dacă $6 \mid (m + n + p)$ rezultă că cel puțin un termen este par și atunci $6 \mid 3mnp$. Dar $m^3 + n^3 + p^3 = (m + n + p)(m^2 + n^2 + p^2 - mn - mp - np) + 3mnp$.

TESTUL 82

I. Se scrie: $A = n \cdot 25^{n+1} - n \cdot 6^2 \cdot 25^{n-1} - 6^2 \cdot 25^{n-1} - 6 \cdot 25^n + 6 \cdot 31 \cdot 6^{n-1} = n \cdot 25^{n-1} \cdot 25^2 - n \cdot 6^2 \cdot 25^{n-1} - 6^2 \cdot 25^{n-1} - 6 \cdot 25 \cdot 25^{n-1} + 6(25 + 6) \cdot 6^{n-1} = (n \cdot 25^{n-1} \cdot 25^2 - n \cdot 6^2 \cdot 25^{n-1}) - (6 \cdot 25 \cdot 25^{n-1} - 6 \cdot 25 \cdot 6^{n-1}) - 6^2(25^{n-1} - 6^{n-1}) = n \cdot 25^{n-1}(25 - 6)(25 + 6) - 6(25 + 6) \cdot (25^{n-1} - 6^{n-1})$. **II.** Rezultă avînd în vedere că $ma + nb = (m + n)(a + b) - (na + mb)$. **III.** Expresia se scrie astfel: $(a + b)(a + 1)(b + 1)$ și se discută după paritățile numerelor a și b. **IV.** 1) Se scrie: $2^n + 1 = [2^n - (-1)^n] + [1 + (-1)^n]$ și rezultă că dacă n este impar implică $3 \mid (2^n + 1)$, iar dacă n este par, împărțirea lui $2^n + 1$ la 3 dă rest 2. 2) Numai pentru $n = 1$. Dacă $n = 2p$ rezultă că: $3^n + 1 = 3^{2p} + 1 = (3^p)^2 + 1 = 8k + 2 = 2(4k + 1)$. Dacă $n = 2p + 1 \Rightarrow 3^n + 1 = 3(3^p)^2 + 1 = 3(8k + 1) + 1 = 4(6k + 1)$ unde $4k + 1$ și $6k + 1$ sînt numere impare.

TESTUL 83

I. 1) Se calculează aplicînd algoritmul lui *Euclid*: $[1470, -840, 672] = [[1470, -840], 672]$; $1470 = 840 \cdot 1 + 630$; $840 = 630 \cdot 1 + 210$; $630 = 210 \cdot 3 + 0 \Rightarrow (1470, 840) = 210$. Deci rezultă că:

$$[1470, -840] = \frac{1470 \cdot 840}{210} = 5880.$$

Analog rezultă:

$[5880, 672] = \dfrac{5880 \cdot 672}{168} = 23\,520$. Deci se obține: $[1470, -480, 672] = 23\,520$. 2) $[21\,024 - 209\,664] = 15\,305\,472$.

II. $N = 2^4 \cdot 3^2 + 4 = 148$. III. 1) $6750 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ și $15 = 3 \cdot 5$. Factorii 2, 3, 5 trebuie să figureze în fiecare număr cel puțin la puterea întîi.

Soluții: $\begin{cases} a_1 = 3 \cdot 5 \\ b_1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ b_2 = 3^2 \cdot 5^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a_3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ b_3 = 3 \cdot 5^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_4 = 3^2 \cdot 5 \\ b_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2. \end{cases}$$

2) $54 = 2 \cdot 3^3$. Fiecare număr se divide prin $2 \cdot 3^3$ și întrucît $\frac{a}{b} = \frac{2^2}{5}$ rezultă că 2^2 este factor al lui a și 5 este factor al lui b. În final rezultă deci că $a = 2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 = 216$ și $b = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$. 3) $1386 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ și a conține ca factor pe $(2 \cdot 3)$, iar b pe 11 și deci $(3 \cdot 7)$ este factor comun al lui a și b. Se obține în final că $a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$ și $b = 11 \cdot 3 \cdot 7 = 231$. 4) $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ și $40 = 2^3 \cdot 5$. Se observă că există cazurile:

$\begin{cases} a_1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ b_1 = 2^4 \cdot 5^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ b_2 = 2^4 \cdot 5 \end{cases}$ $\begin{cases} a_3 = 2^3 \cdot 5 \\ b_3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_4 = 2^3 \cdot 5^2 \\ b_4 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{cases}$$

IV. Se poate scrie:

$$n^2 + 6n + 8 = n^2 + 6n + 9 - 1 = (n + 3)^2 - 1.$$

TESTUL 34

I. $391 = 400 - 9 = 20^2 - 3^2 = (20 - 3)(20 + 3)$; $899 = 900 - 1$; $1331 = 2500 - 169 = 50^2 - 13^2$; $1519 = 1600 - 81 = 40^2 - 9^2$; $9919 = 100^2 - 9^2$. II. $x + 2$ trebuie să fie divizor al numărului 16 și rezultă că $M_1 = \{0, 2, 6, 14\}$; $M_2 = \{-13, -7, -5, -3, -1, 5\}$. Se scrie $\frac{7x + 1}{x - 2} = 7 + \frac{15}{x - 2}$ și $\frac{2x^2 - 8x + 6}{x - 4} = 2x + \frac{6}{x - 4}$, rezultînd în final $M_4 = \{-2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$.

III. Fie $d = \{3n + 2,\ 10n + 7\}$ și atunci rezultă că $d \mid 3n + 2$ și $d \mid 10n + 7 \Rightarrow d \mid 10(3n + 2)$ și $d \mid 3(10n + 7) \Rightarrow d \mid (30n + 21 - 30n - 20) \Rightarrow d \mid 1$.

IV. 2) Fie $A = 2a + b + 4c$; $B = 3a + 2b + c$ și $C = 2a + b + 3c$. Rezolvînd sistemul format de aceste trei relații rezultă: $a = -5A - B + 7C$; $b = 7A + 2B - 10C$ și $c = A - C$. Se arată imediat că dacă $d = (a, b, c) \Rightarrow d \mid A$, $d \mid B$ și $d \mid C$. Reciproc: dacă $\delta = (A, B, C) \Rightarrow \delta \mid a$, $\delta \mid b$, $\delta \mid c$ și deci au divizori comuni.

TESTUL 85

I. 1) $x^2 - y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 2 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 2$. Ținînd seama de ultima relație și de faptul că divizorii lui 2 în Z sînt ± 1; ± 2, se formează patru sisteme de ecuații. Rezultă în final că $M_1 = \emptyset$. 2) $(x + 2)(y + 3) = 2xy \Leftrightarrow xy - 3x - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y - 3)(x - 2) = 12$. 3) Se descompune expresia în factori și se va pune condiția ca unul din factori să fie 1. $M_3 = \{1\}$.

II. $$[a, b, c] = [[a, b], c] = \frac{[a, b] \cdot c}{([a, b], c)} = \frac{abc}{(a, b)[(a, c), (b, c)]} =$$

$$= \frac{abc((a, c), (b, c))}{(a, b) \cdot (a, c) \cdot (b, c)} = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b) \cdot (a, c) \cdot (b, c)}.$$

III. Dacă $n = 3$ rezultă $A = 3$; $B = 7$; $C = 23$. Dacă $n = 3k + 1 \Rightarrow C = 4n + 11 = 12k + 15 = 3(4k + 5)$. Dacă $n = 3k + 2 \Rightarrow B = 3k + 6 = 3(k + 2)$ și deci cel puțin unul din numere este prim. IV. Se consideră $(x, z) = d_1$ și $(y, t) = d_2 \Rightarrow x = l \cdot d_1$ și $z = m \cdot d_1$ cu $(l, m) = 1$, iar $y = n \cdot d_2$ și $t = p \cdot d_2$ cu $(n, p) = 1$, care substituite în relația de condiție conduce la:

$$l \cdot n \cdot d_1 \cdot d_2 = m \cdot p \cdot d_1 \cdot d_2 \Rightarrow l \cdot n = m \cdot p \Leftrightarrow \frac{l}{m} = \frac{p}{n} \Rightarrow l = p$$

și $m = n$. În final rezultă că expresia numărului N este: $N = l^2 d_1^2 + m^2 d_1^2 + n^2 d_2^2 + p^2 d_2^2 = (l^2 + n^2)(d_1^2 + d_2^2)$ și deci N nu este număr prim.

TESTUL 86

II. $f = i + \sqrt{3}\,X + \frac{1}{2}X^2 + 3\,X^3$

TESTUL 87

II. 1) Cîtul este $h = 3iX^4 - 2iX^3 + (3 - 2i)X + i$, iar restul este $(6 - 4i)X$ 2) Polinoamele sînt divizibile și cîtul este $h = -1 + X - X^{n-3} + X^{n+1}$. **III.** Polinomul g divide polinomul f.

TESTUL 88

I. $m = 0$ și $n = -1$ **II.** $r = 6$. **III.** Pentru aflarea c.m.m.c. se aplică algoritmul lui *Euclid*, sau se descompun polinoamele în factori.

TESTUL 89

1. a) *Metoda I*. Dacă g este divizibil prin $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ atunci este divizibil și cu $X + 1$ și $X - 2$. Rezultă conform teoremei lui *Bézout* că:

$$\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(2) \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -5 \\ 2a + b = -7 \end{cases}$$

Metoda a II-a. Se împarte polinomul g la $X^2 - X - 2$ și se pune condiția ca restul să fie zero (adică polinomul constant $(0 = (0, 0, 0 \ldots))$. *Metoda a III-a*. Se aplică schema lui *Horner* și se pune condiția ca resturile să fie zero.

X^3	X^2	X^1	X^0	Restul	
1	a	b	6		
	1	$a - 1$	$-a + b + 1$	$a - b + 5$	$\Rightarrow a - b + 5 = 0$
		1	$a + 1$	$a + b + 3$	$\Rightarrow a + b + 3 = 0$

Metoda a IV-a. Fie polinomul $h = (X^2 - X - 2)(X + \alpha)$. Se pune condiția ca $g - h$ să fie polinomul $0 = (0, 0, 0)$ și rezultă:

$$\begin{cases} a = \alpha - 1 \\ b = -2 - \alpha \Rightarrow \alpha = -3; \quad a = -4; \quad b = 1. \\ 6 = -2\alpha \end{cases}$$

Observație. Ultimele trei metode prezintă avantajul că se obține și cîtul împărțirii lui g la $X^2 - X - 2$; $g(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

b) Dacă polinomul f este divizibil cu g înseamnă că:

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(2) \quad = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases}$$ (sistem din care se pot determina coeficienții m, n, p)

Este evident că se pot aplica și celelalte trei metode expuse mai sus.

2. $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$
$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d$
$f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$
$\overline{f(n) = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d}$

$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = a(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + b(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + c(1 + 2 + \ldots + n) + bd$. Dar $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$; $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Dacă $(X - a) \mid f$ atunci există un polinom h cu gradul mai mic cu o unitate decît gradul lui f astfel încît: (1) $f = (X - a)h$. Dar f este divizibil cu $X - b \Rightarrow f(b) = 0 \Rightarrow (b - a)h(b) = 0$, și cum $b - a \neq 0$ rezultă $h(b) = 0$, deci h se divide cu $X - b$ și atunci: (2) $h(x) = (x - b)h_1(x) \Rightarrow f = (X - a)(X - b)h_1$. Dar f este divizibil cu $X - c \Rightarrow f(c) = 0 \Rightarrow (c - a)(c - b)h_1(c) = 0 \Rightarrow h_1(c) = 0 \Rightarrow h_1$ este divizibil cu $X - c \Rightarrow (\exists)$ un polinom h_2 cu gradul mai mic cu o unitate decît h_1 astfel ca $h_1 = (X - c)h_2$. Rezultă în final: $f = (X - a)(X - b)(X - c)h_2$.

TESTUL 90

1. Fie h cîtul împărțirii polinomului f la $(X-a)(X-b)(X-c)$. Conform teoremei împărțirii cu rest avem: $f = (X-a)(X-b)(X-c)h + r$. Deci (1) $f = (X-a)(X-b)(X-c)h + AX^2 + BX + C$. Cum $f(a) = r_1$, $f(b) = r_2$, $f(x) = r_3$, din relația (1) rezultă:

$$\begin{cases} Aa^2 + Ba + C = r_1 \\ Ab^2 + Bb + C = r_2 \\ Ac^2 + Bc + Cc = r_3 \end{cases}$$

sistem în care necunoscutele sînt A, B, C.

Rezultă în final:

$$r = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} r_1 + \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} r_2 + \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} r_3.$$

2. a) Din condițiile $f(1) = 4$; $f(-2) = -5$, $f(-1) = -1) = 0 \Rightarrow f = X^3 + X^2 + X + 1$. b) Este evident că gradul lui g este 4. Deci $g = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \Rightarrow e = -1$. Egalînd $a(X+1)^4 + b(X+1)^3 + c(X+1)^2 + d(X+1) - aX^4 - bX^3 - cX^2 - dX = f$, rezultă $g = \frac{X^4}{4} - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{2}{3}X - 1$.

c) $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = g(2) - g(1) + g(3) - g(2) + g(4) - g(3) + \ldots + g(n+1) - g(n) = g(n+1) - g(1) = \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{(n+1)^3}{6} + \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{2(n+1)}{3} - 1 = \frac{n(3n^3 + 10n^2 + 15n + 20)}{12}$.

Altfel se obține: $g(1) = 0$; $g(2) = 4$; $g(3) = 19$; $g(4) = 59$.

3. Pentru simplificarea fracției trebuie să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor de la numărător și numitor. Pentru aceasta se va aplica algoritmul lui *Euclid*.

$$\begin{array}{l|l} 2X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 9X + 6 & X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 \\ \underline{-2X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 6X - 4} & \overline{\quad 2 \quad} \\ \phantom{-2X^4 + 6X^3 -{}} X^2 - 3X + 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 & X^2 - 3X + 2 \\ \underline{-X^4 + 3X^3 - 2X^2} & \overline{X^2 + 1} \\ \qquad\qquad X^2 - 3X + 2 & \\ \qquad\quad \underline{-X^2 + 3X - 2} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Deci c.m.m.d.c. este ultimul rest nenul, adică $X^2 - 3X + 2$ și în plus $X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1)$ etc.

TESTUL 91

1. a) Cum x_1, x_2, x_3 sînt rădăcini atunci rezultă:

$$x_1^3 - x_1^2 + \alpha x_1 + 3\alpha - 4 = 0$$
$$x_2^3 - x_2^2 + \alpha x_2 + 3\alpha - 4 = 0$$
$$x_3^3 - x_3^2 + \alpha x_3 + 3\alpha - 4 = 0$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + 3(3\alpha - 4) = 0.$$

Se scriu relațiile lui *Vieta*:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \alpha \\ x_1x_2x_3 = 4 - 3\alpha \end{cases}$$

și ținînd seama că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ rezultă că:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 13 - 10\alpha - 2\alpha.$$

b) Dacă în relațiile (1) se amplifică respectiv cu x_1, x_2, x_3 și se ține seama de punctul precedent obținem:

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 13 - 10\alpha - 2\alpha - \alpha(1 - 2\alpha) - 8\alpha + 4 \Rightarrow \alpha = 1 \in Z/\{7\}$ și $\alpha = 7 \notin Z/\{7\}$.

Pentru $\alpha = 1$ ecuația este $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0$.

c) Pentru $n = 4k \Rightarrow m = 3$, $n = 4k + 1 \Rightarrow m = 1$, $n = 4k + 2 \Rightarrow m = -1$, $n = 4k + 3 \Rightarrow m = 1$.

2. a) Dacă q este rația progresiei atunci ecuația se scrie: $(x+q)(x^2+q^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -q$, $x_{2,3} = \pm iq \Rightarrow |x_1| =$

$$= |x_2| = |x_3| = q.$$

b) $S_n = (-q)^n + (iq)^n + (-iq)^n$ și se consideră cazurile $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$. Pentru $n = 4k \Rightarrow S_n > 0$.

c) Dacă $a = 1 \Rightarrow b = q$, $c = q^2$, $d = q^3$, iar $f\left(\frac{1}{x}\right) =$
$= \frac{1}{x^3} + \frac{q}{x^2} + \frac{q^2}{x} + q^3$ etc. d) În aceste condiții rezultă: $(x-1)[mx^2 + (m-n)x + m] = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2x_3 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1^2 = x_2 \cdot x_3$.

TESTUL 92

1. a) După ordonarea polinomului după puterile lui X se obține: $f = (m+n+p)X^3 - 3(am+bn+pc)X^2 +$
$+ 3(a^2m + b^2n + c^2p)X - (a^3m + b^3n + c^3p)$.

Pentru ca f să fie o constantă trebuie ca:

$$\begin{cases} m + n + p = 0 \\ am + bn + pc = 0 \\ a^2m + b^2n + c^2p = 0 \end{cases}$$

Cum $a = b = c$ rezultă că sistemul omogen în raport cu m, n, p admite numai soluția banală. Deci $m = n = p = 0$, valori pentru care și termenul liber al lui f este nul.

$$\left.\begin{aligned} \text{b) } f(a) = 0 &\Rightarrow \frac{n}{(a-c)^3} = \frac{p}{(b-a)^3} \\ f(b) = 0 &\Rightarrow \frac{m}{(c-b)^3} = \frac{p}{(b-a)^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{m}{(c-b)^3} =$$

$$= \frac{n}{(a-c)^3} = \frac{p}{(b-a)^3} \Rightarrow m(a-c)^3 = n(c-b)^3 \Rightarrow f(c) =$$
$$= m(c-a)^3 + n(c-b)^3 = 0.$$

2. a) Dacă ecuaţia $f(x) = 0$ admite rădăcinile x_1, x_2, x_3 atunci ecuaţia $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, admite rădăcinile $\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}; \frac{1}{x_3}$; $(x_i \neq 0)$; deci E_2): $cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$. (Altfel: se folosesc relaţiile lui *Vietà*.) b) Dacă $x_1 = \alpha$ este rădăcină comună, din $\alpha = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \pm 1$. Pentru $\alpha = 1 \Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = (x - 1)[x^2 + (a + 1)x + a + b + 1] \Rightarrow x_1 = 1$,

$$x_{2,3} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 + 4c}}{2}$$ cu condiţia $a + b + c = -1$.

Pentru $\alpha = -1$ avem $x_1 = -1$,

$$x_{2,3} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4c}}{2}$$ condiţia fiind $a - b + c = 1$.

c) $(x - 3)(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

TESTUL 93

1. Se scriu relaţiile lui *Vietà*:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = -8 \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -12 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \alpha \end{cases}$$

şi ţinînd seama de relaţia $x_1x_2 = x_3x_4$ rezultă $\alpha = 16$, $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. Altfel: Se notează $x_1x_2 = x_3x_4 = p$ şi $x_1 + x_2 = s_1$, $s_3 + x_4 = s_2$ şi atunci egalînd $X^4 - X^3 - 8X^2 + 12X + \alpha = (X^2 - s_1X + p)(X^2 - s_2X + p)$ se obţin valorile constantelor α, s_1, s_2, p. **2.** Se scriu relaţiile lui *Vietà*:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_2 + x_3 = \frac{5}{6} \\ (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = -\frac{25}{2} \\ x_1x_4(x_2 + x_3) + x_2x_3(x_1 + x_4) = -\frac{\alpha}{6} \\ x_1x_2x_3x_4 = 4 \end{cases}$$

și folosind relația suplimentară rezultă $\alpha = -10$, $x_1 = 4$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$, $x_3 = -\frac{2}{3}$.

3. Rădăcinile fiind în progresie aritmetică se pot face notațiile: $x_1 = u - 3r$, $x_2 = u - r$, $x_3 = u + r$, $x_4 = u + 3r$ și înlocuind în relațiile lui *Vietà* se obține $u = 1$ și $r = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$. Altfel: relația $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ împreună cu relațiile lui *Vietà* conduc la același rezultat. **4.** a) Se substituie în relațiile lui *Vietà* $x_1 + x_2 = 0$ și rezultă condiția $a^2d + c^2 = abc$. b) Se notează $x_1 = \frac{u}{q^3}$; $x_2 = \frac{u}{q}$; $x_3 = uq$; $x_4 = uq^3$ și se introduc în relațiile lui *Vietà*. Altfel: x_1, x_2, x_3, x_4 fiind în progresie geometrică rezultă că $x_1x_4 = x_2x_3$ etc. c) În relațiile lui *Vietà* se folosește condiția $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

TESTUL 94

1. Fie x_0 rădăcina comună. Cum $f(x_0) = 0$ și $g(x_0) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Rightarrow x_0^3 - x_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ și $x_0 = -1$. Dacă $x_0 = 0 \Rightarrow \beta = 0$ și ecuațiile sînt: $x^3 + \alpha x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$, $x^2 + \alpha x = 0 \Rightarrow x_1 = -\alpha$.

Dacă $x_0 = 1$ este rădăcina comună atunci $\alpha + \beta + 1 = 0$ și ecuațiile au respectiv rădăcinile:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4\alpha}}{2} \text{ și } x_1 = 1 - \alpha.$$

2. Calculînd cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g (folosind algoritmul lui *Euclid*) putem scrie: $f(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2) = 0$ și $g(x) = (x-1)^2(x+1)(x+2) = 0$.

3. Dacă ecuația $f(x) = 0$ are rădăcini multiple, atunci acele rădăcini sînt rădăcini comune ale ecuațiilor $f(x) = 0$ și $D(f)(x) = 0$. Folosind algoritmul lui *Euclid* se obține c.m.m.d.c. al polinoamelor f și $D(f)$, ($D(f)$ este derivata formală a polinomului f) ale cărui rădăcini sînt: $x_1 = x_2 = -1$

și $x_3 = 2$. Cum $x = -1$ este rădăcină dublă a derivatei, rezultă că este rădăcină triplă a funcției. Deci pentru aflarea rădăcinilor lui f se poate aplica, spre exemplu, schema lui *Horner* și rezultă: $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = x_5 = 2$, $x_6 = -3$.

TESTUL 95

1. a) Descompunînd în factori se obține: $f(x, m) = (x-2)(x-1)(x-2m+1) = 0$ și $g(x, m) = (x-2)(x-m-1) = 0$. Rezultă că $x = 2$ este rădăcina comună a celor două ecuații $(\forall)\, m \in R$. b) Pentru ca cele două ecuații să mai admită încă o rădăcină comună trebuie ca $x = m + 1 \Rightarrow f(m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\quad m_2 = 1,\quad m_3 = 2$. Pentru $m_1 = 0 \Rightarrow f(x, 0) = 0$ are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, iar $g(x, 0) = 0$ are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Pentru $m = 1$, $f(x, 1) = 0$ are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 1$, iar $g(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = x_2 = 2$. Pentru $m = 2 \Rightarrow f(x, 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, iar $g(x, 2) = 0$ are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Deci pentru $m = 2$ și $m = 0$ ecuațiile admit două rădăcini comune. c) Pentru $m = 0$ inecuația este: $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 2}{(x-1)(x+1)(x-2)} < 0 \Rightarrow x \in (-1\ \alpha) \cup \cup (1, 2)$; unde $\alpha \in (-1, 0)$.

2. a) Se caută rădăcinile întregi ale ecuației printre divizorii termenului liber, eliminîndu-se divizorii care nu se găsesc cuprinși în intervalul (L', L) unde L' și L sînt respectiv limita inferioară și limita superioară a rădăcinilor. Se obțin rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$, $x_{3,4} = 1 \pm i$, $x_{5,6} = 1 \pm i$. b) Folosind metoda de calcul pentru rădăcinile raționale se găsesc rădăcinile $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{2}{3}$, $x_4 = -\dfrac{2}{3}$.

TESTUL 96

1. Coeficienții ecuației fiind raționali rezultă că ecuația va admite ca rădăcină și pe conjugata rădăcinii date. a) Deci avem $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ și $x_2 = 3 - \sqrt{2}$. Împărțind polinomul $f = x^4 - mx^3 - 29x^2 + 13x + 42$ cu $(x - x_1)(x - x_2)$, adică cu $x^2 - 6x + 7$ rezultă $m = -1$ și $x^2 + 7x + 6 = 0$. Altfel, se puteau folosi relațiile lui *Vieta*. b) Același ratio-

nament folosit la punctul a). c) Dacă ecuația admite rădăcina $x_1 = i$ atunci admite și rădăcina $x_2 = -i$. Se împarte ecuația la $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ și se pune condiția ca restul să fie zero. d) Ecuația admite și rădăcinile: $x_2 = \sqrt{2} + i$, $x_3 = -\sqrt{2} - i$, $x_4 = -\sqrt{2} + i$. **2.** a) $x_1 = -5$. b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

TESTUL 97

Ecuațiile sînt reciproce. **1.** $x^3 - 1 - 5x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) - 5x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x + 1) = 0$ etc. **2.** Ecuația se mai scrie: $(x - 1)(3x^2 - x + 3) = 0$. **3.** $x^3 - (1 - i)x^2 - (1 - i)x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)[x^2 - x(2 - i) + 1] = 0$. **4.** Se împarte ecuația prin x^2 și se obține:

$$x^2 - 3x - 6 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$ Se notează $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Deci avem: $t^2 + 2 - 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t_1 = +4$ și $t_2 = -1$ deci rădăcinile ecuației inițiale sînt rădăcinile ecuațiilor $x - \frac{1}{x} = +4$ și $x - \frac{1}{x} = -1$. **5.** Vezi punctul precedent. **6.** Ecuația se mai scrie: $x^5 + 1 - 2x(x^3 + 1) + 9x^2(x + 1) = 0$ etc.

TESTUL 98

1. Împărțind prin x^3 se obține: $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$, $x^3 + \frac{1}{x^3} + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$. Notînd $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ și $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$. Deci se poate scrie: $t^3 - 3t + 2t^2 - 4 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 1 + 2(t^2 - 1) = 0$ etc.

2. Se notează $x^2 = y$. **3. a)**. Ecuația se mai scrie: $(x-1)[2(m-1)x^2-(m^2-2m+5)x+2(m-1)]=0$. Pentru ecuația de gradul doi, avem $\Delta=(m-3)^2(m+1)^2 \geq 0$.

m	Δ	P	S	Concluzii pentru ecuația de gradul II	Concluzii pentru ecuația de gradul III
$m \in (-\infty, -1) \cup \cup (-1, 1)$	+	+	—	$x_1 \in R$, $x_2 \in R$, $x_1 < 0$ $x_2 < 0$. $x_1 \neq x_2$	Două rădăcini negative și $x_3 = 1$
$m = 1$	+	nedef.		Ecuația devine $4x = 0$	$x_1 = 0$; $x_2 = 1$
$m \in (1, 3)$	+	+	+	$x_1 = \frac{1}{x_2}$, $x_1 \in R$, $x_2 \in R$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$	Două rădăcini pozitive inverse una alteia și $x_3 = 1$.
$m = 3$	0	+	+	$x_1 = x_2 = 1$	$x_1 = x_2 = x_3 = 1$
$m \in (3, +\infty)$	+	+	+	$x_1 = \frac{1}{x_2} > 0$.	$x_1 = \frac{1}{x_2}$ pozitivă, $x_3 = 1$.

Pentru $m = -1 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = 1$.

b) Ecuația se mai scrie $(x^2+1)(x^4-x^2+m+2)=0$ sau încă $(x^2+1)(y^2-y+m+2)=0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i$ și se discută ecuația $y^2-y+m+2=0$; $x = \pm\sqrt{y}$. c) Este o ecuație reciprocă. Se împarte prin x^2 și grupînd se obține: $2m\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-(3m-8)\left(x+\frac{1}{x}\right)+2(m+2)=0$. Se notează $y = x+\frac{1}{x}$ și rezultă ecuația $2my^2-(3m-8)y-2m+4=0$ cu rădăcinile $y_1 = -\frac{1}{2}$ și $y_2 = \frac{2m-4}{m}$ deci: $2x^2+x+2=0$ și $mx^2-2(m-2)x+m=0$ etc.

TESTUL 99

1. a) Se descompune în factori f și se obține: $f = (X^2 + aX + a^2)(X^3 + a^3) = g(X^3 + a^3)$. Deci f este divizibil prin g.

Dar $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ și $x^3 + a^3 = 0 \Rightarrow (x + a)(x^2 - ax + a^2) = 0$ și $x^2 + ax + a^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -a$, $x_2 = a\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = a\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = a\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = a\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

b) Se observă că: $|x_1| = |x_2| = |x_3| = |x_4| = |x_5| = |a|$, iar relațiile se verifică imediat. c) Cum $(x - a)f(x) = x^6 - a^6$ și $(x + a)f(-x) = -(x^6 - a^6)$. Presupunînd că $(\exists)$ $x_1 \neq 0$ astfel ca: $f(x_1) = f(-x_1) \neq 0 \Rightarrow x_1 - a + x_1 + a = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, adică $x_1 = -x_1 = 0$. **2.** Coeficienții C_m^1, C_m^2, C_m^3 fiind în progresie aritmetică rezultă relația: $C_m^2 = \frac{C_m^1 + C_m^3}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow m = 7$. $T_6 = C_7^5 a^2 b^5 = 21 \cdot 2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3}$, $2^{\lg(10-3^x) + \lg 3^{x-2}} = 2^0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 2$. **3.** Cum orice număr n poate fi scris sub forma $4k + r$, unde k este un număr întreg pozitiv sau zero, iar $r = 0, 1, 2, 3$ atunci rezultă că: $S = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2^{4k} \cdot 2^r + 3^{4k} \cdot 3^r + 4^{4k} \cdot 4^r = 1 + (5l_1 + 1) \cdot 2^r + (5l_2 + 1)3^r + (5l_3 + 1)4^r = 5p + 1 + 2^r + 3^r + 4^r$, $p \in Z$. Deci S se divide cu 5, dacă și numai dacă $1 + 2^r + 3^r + 4^r = 0$; în acest caz S nu se divide cu 5. Dacă n nu se divide cu 4 atunci $r = 1$, $r = 2$ sau $r = 3$ și $1 + 2^r + 3^r + 4^r = 10$, $1 + 2^r + 3^r + 4^r = 30$ sau $1 + 2^r + 3^r + 4^r = 100$ și în acest caz S se divide cu 5.

TESTUL 100

1. a) Se ordonează după puterile lui a și avem: $a^2x(4x^3 - 8x^2 - x + 2) - 2a(4x^3 - 8x^2 - x + 2) + x(4x^3 - 8x^2 - x + 2) = 0 \Rightarrow (4x^3 - 8x^2 - x + 2) \cdot (a^2x - 2a + x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{2a}{1 + a^2}$. b) Cum $(\forall a) \left|\frac{2a}{1 + a^2}\right| < 1$ rezultă că $\{x_2, x_3, x_4\} \subset [-1, 1]$.

c) Pentru ca ecuația să admită o rădăcină dublă trebuie ca: $\frac{2a}{1+a^2} = 2$ sau $\frac{2a}{1+a^2} = \frac{1}{2}$ sau $\frac{2a}{1+a^2} = -\frac{1}{2}$, de unde se determină a. d) Se înlocuiesc în relația dată rădăcinile obținute la punctul a).

2. Dacă m s-ar divide cu 5 înseamnă că $m(am^2 + bm + c) + d$ s-ar divide cu 5 numai dacă d s-ar divide cu 5. Deci m este de forma $5k + r$ unde $k \in Z$, iar $r = 1, 2, 3, 4$. Se alege n numărul 1, 3, 2, 4 după cum $r = 1, 2, 3, 4$ și produsul mn dă restul 1 prin împărțirea cu 5. Înmulțind $am^3 + bm^2 + cm + d$ cu n^3 și scăzînd $dn^3 + cn^2 + bn + a$ (pentru eliminarea lui d) se obține: $(mn - 1) \cdot [a(m^2n^2 + mn + 1) + bn(mn + 1) + cn^2]$ care este divizibil cu 5 rezultă că și $a + bn + cn^2 + dn^3$ este divizibil cu 5.

3. a) Avem: $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + n$ etc.

b) $\sum_{k=1}^{n} (4k - 3)^3 = \sum_{k=1}^{n} (64k^3 - 144k^2 + 108k - 27) = n(16n^3 - 16n^2 - 2n + 3)$.

c). Se observă că: $(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = C_{p+1}^1 n^p + C_{p+1}^2 n^{p-1} + \ldots + 1$. Se dau lui n valorile 0, 1, ... $p + 1$ și însumînd membru cu membru se obține: $(n+1)^{p+1} = C_{p+1}^1 S_p + C_{p+1}^2 S_{p-1} + \ldots + C_{p+1}^1 S_1 + n + 1$, care este o relație de recurență între sumele $S_1 \ldots S_p$. De exmplu, pentru $p = 4$ avem: $(n+1)^5 = C_5^1 S_4 + C_5^2 S_3 + C_5^3 S_2 + C_5^1 S_1 + n + 1$. Cum $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

TESTUL 101

1. Mai întîi se ordonează ecuația și folosind în relațiile lui *Viela* relația $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ rezultă că $m_1 = 5$ și $m_2 = -\frac{25}{9}$. Faptul că rădăcinile sînt în progresie aritmetică mai poate fi scris și astfel: $x_1 = u - r$, $x_2 = u$, $x_3 = u + r$.

2. Scriem: $\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow 2n +$

$$+ \sqrt{4n^2 - 1} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

$$\begin{cases} x + y = 2n \\ 4xy = 4n^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow x = n + \frac{1}{2}, \quad y = n - \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n - \frac{1}{2}}.$$

Altfel: Pentru scrierea lui $\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 4}}$ se folosește formula din testul 29. Se dau lui n valorile 1, 2... k și se însumează membru cu membru obținîndu-se:

$$S_k = \sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2k + 1} - 1).$$

Deci

$$S_{40} = \sum_{n=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{81} - 1) = 4\sqrt{2}.$$

3. a) Ecuația se mai scrie: $(x - 1)[x^2 + (2m - 1)x + m + 1] = 0$. b) $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{1}{2}$; $m_3 = \frac{7}{4}$.

TESTUL 102

1. Ecuația se mai poate scrie: $(x - 1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ sau $x^2 + x + 1 - m = 0$. Rădăcina dublă poate să fie $x = 1$ și atunci trebuie să verifice și ecuația $x^2 + x + 1 - m = 0 \Rightarrow m = 3$ și în acest caz $x_1 = x_2 = 1$

și $x_3 = -2$. Rădăcina poate să fie și rădăcina dublă a ecuației $x^2 + x + 1 - m = 0$ deci $\Delta = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$. În acest caz rădăcinile sînt: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}$. **2.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, b) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -8$.
3. Se scrie:

$$(1 + \sqrt{2})^{2n} = 1 + 2C_{2n}^{2} + \ldots + 2^k C_{2n}^{2k} + \ldots + 2^n +$$
$$+ \sqrt{2}\,[C_{2n}^{1} + 2C_{2n}^{3} + \ldots + 2^k C_{2n}^{2k+1} + \ldots +$$
$$+ 2^{n-1}C_{2n}^{2n-1}] = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} + \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}$$

și

$$(1 - \sqrt{2})^{2n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} - \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}.$$

Se înmulțesc membru cu membru cele două egalități. **4.** Se înmulțesc ambii membri ai egalității $(k + 1)!k = (k + 2)! - 2(k + 1)!$ cu 2^{n-k} și se însumează după k.

TESTUL 103

1. 1 124. **2.** a) $x \in \left(-3, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 3\right)$ b) Se vor considera cazurile $x \in (-1, 0)$ și $x \in (0, 2)$. **4.** Pentru calculul lui n se rezolvă ecuația $2^n + 504 = 8^n$ rezultînd $n = 3 \Rightarrow \Rightarrow T_3 = 3\sqrt[6]{x^{-1}}$.

TESTUL 104

1. a) Pentru $a \in (0, 1)$ inecuația are soluția $x \in (a; \sqrt{a}) \cup (1, +\infty)$, iar pentru $a \in (1, +\infty) \Rightarrow x \in (1, \sqrt{a}) \cup (a, +\infty)$. b) $x \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. c) $x \in (1, \infty) \Rightarrow x = 2$. **2.** a) $x = 100$, $y = 10$. b) $(1, 4)$; $(4, 7)$. c) $x = a^{2(2m-3n)}$, $y = a^{6(m-2n)}$.

TESTUL 105

1. Fiindcă $25 = M11 + 3$, $49 = M11 + 5$, $15 = M11 + 4$, $125 = M11 + 4$ rezultă că $125 \cdot 25^n \cdot 49^n = M \cdot 11 + 4^{n+1}$ și $4 \cdot 15^n = M \cdot 11 + 4^{n+1}$.

3. Este suficient să se arate că expresia se divide cu $41 \cdot 83$, fiindcă $3\,403 = 41 \cdot 83$, iar 41 și 83 sînt numere prime.

4. Se observă că $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2(n-k)} = (1 + x^2)^n$ de unde rezultă că $x(1 + x^2)^n = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$, $x_1 = \ldots = x_n = i$, $x_{n+1} = \ldots x_{2n} = -i$.

5. a) $x = \dfrac{\lg 3a}{\lg 2 - \lg 3}$ b) $x = 1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{2^1}{3^2}$; $x = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{2^2}{3^3} \ldots x = n \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}};\quad x = -1.\ a'_1 =$$

$$= \frac{1}{2};\quad x = -2 \Rightarrow a'_2 = \frac{3}{2^2}; \ldots x = -n \Rightarrow a'_n = \frac{3^{n-1}}{2^n}.$$

Rezultatele obținute se verifică folosind metoda inducției matematice.

6. a) $x = 3$; b) $x = 3$; c) $x = 5$.

TESTUL 106

1. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} (-1)\cdot(-1) + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (3) & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},\ \text{iar } A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -13 & 14 \\ 21 & -6 \end{bmatrix}.$$

b) $P(A) = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -13 & 14 \\ 21 & -6 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 + 13 & -2 - 14 \\ -3 - 21 & 6 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ -18 & 12 \end{bmatrix}.$$

de unde rezultă că $\det P(A) = \begin{vmatrix} 18 & -12 \\ -18 & 12 \end{vmatrix} = 0.$

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 2z & -y + 2t \\ 3x & 3y \end{bmatrix}.$

Matricele $\begin{bmatrix} -x + 2z & -y + 2t \\ 3x & 3y \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sînt egale

atunci și numai atunci cînd $\begin{cases} -x + 2z = 1 \\ -y + 2t = 0 \\ 3x = 0 \\ 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{6} \end{cases}.$

Rezultă matricea $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$

2. a) Matricea A are atîtea coloane cîte linii are matricea B, deci produsul $A \cdot B$ este definit. Matricea B are atîtea coloane cîte linii are matricea A deci produsul $B \cdot A$ este definit.

b) $M_1 = A \cdot B = \begin{bmatrix} 22 & 14 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ și $M_2 = B \cdot A =$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 20 & 15 \\ -5 & 0 & 3 \\ 3 & 32 & 27 \end{bmatrix}.$$

3. $A^n = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$, rezultat ce se verifică prin inducție.

TESTUL 107

1. a) Matricea este singulară dacă $\det A = 0$. În cazul de față fiindcă $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$ rezultă că ma-

tricea este singulară. b) Rangul matricei este 2. **2.** a) Se dă factor comun b din linia a treia și din coloana a doua și

rezultă: $b^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2b^2$. b) 72. c) 1. d) Se înmulțește prima linie cu doi și apoi ceea ce s-a obținut se scade din linia a II-a. Se obțin astfel două linii proporționale deci determinantul este nul.

TESTUL 108

1. a) $x = -1$. b) $x = 0$. c) $x_1 = 10$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2$, $x_3 = 2\sqrt{2}$, $x_4 = -2\sqrt{2}$.

TESTUL 109

II. $\Delta = 5(1 - \alpha)$ și pentru $\alpha \neq 1$ sistemul este compatibil determinat cu soluția $(-1, 0, 1)$. Pentru $\alpha = 1$ sistemul este

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 3y + 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Matricea coeficienților $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ are rangul doi și se poate considera ca determinant principal

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Primele două ecuații sînt ecuații principale, iar a treia ecuație este ecuația secundară. Necunoscutele principale sînt x și y. Fiind o singură ecuație secundară, se poate forma un determinant caracteristic

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Conform teoremei lui *Rouché* sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

$$\begin{cases} 2x - y = -1 - \lambda \\ -x + 3y = 3 - 2\lambda \end{cases}$$ cu soluția $(x = -\lambda, y = 1 - \lambda, z = \lambda)$.

III. $\Delta = -\beta(\alpha - 1)$ și pentru $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 1$ sistemul este compatibil determinat cu soluția

$$x = \frac{2\beta - 1}{\beta(\alpha - 1)}; \quad y = \frac{1 - \alpha}{\beta(1 - \alpha)} = \frac{1}{\beta}; \quad z = \frac{2\alpha\beta - 4\beta + 1}{\beta(\alpha - 1)}.$$

Pentru $\beta = 0$, $\alpha = 1$, rangul matricei coeficienților este egal cu doi, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, dar determinantul caracteristic este 1.

Pentru $\beta = 0$ și $\alpha \neq 1$ sistemul este incompatibil. Dacă $\beta \neq 0$ și $\alpha = 1$ se consideră cazurile:

$$\text{a) } \beta \neq \frac{1}{2} \text{ și b) } \beta = \frac{1}{2}.$$

IV. Din condițiile ca determinantul principal să fie de ordinul doi (deci toți determinanții de ordinul trei să fie egali cu zero) și ca determinantul caracteristic să fie nul rezultă: $a = 2$, $b = -12$ și $c = 2$.

TESTUL 110

I. a) Ecuația este echivalentă cu $(x^3 - 4x^2 - 2x + 5) = 0$ avînd rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$, $x_3 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$.

b) Ecuația $(x^3 - 4x^2 - 2x + 5) = \lambda(x^2 - 1)$ se mai scrie sub forma: $(x - 1) \cdot [x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda - 5] = 0$.

c) $\lambda \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right) \cup (6, \infty)$.

II. 1. a) $x = \dfrac{(d-c)(b-d)}{(a-c)(b-a)}$; $\quad y = \dfrac{(a-d)(d-c)}{(b-a)(c-b)}$;

$$z = \frac{(a-d)(d-b)}{(c-a)(b-c)}.$$

b) dacă $a = b = c = d$ sistemul este nedeterminat şi are o dublă infinitate de soluţii. Dacă $a = b = c$ şi $d \neq a$ sistemul este incompatibil. Dacă $a = b = d$ şi $a \neq c$ atunci $z = 0$, iar x şi y nedeterminate. Dacă $a = b$, $a \neq c$, $a \neq d$, $d \neq c$ sistemul este incompatibil. Dacă $a = b$, $d = c$, $c \neq a$ sistemul este nedeterminat.

2. a) Dezvoltînd determinantul se obţine:

$$D = e^{2(2x+a)} + \frac{2}{e^{2x+a}} - 3.$$

b) Se notează $e^{(2x+a)} = t$ şi ecuaţia $D = 0$ se scrie:

$$t^2 + \frac{2}{t} - 3 = 0 \text{ cu rădăcinile } t_1 = t_2 = 1,\ t_3 = -2.$$

Atunci $e^{2x+a} = 1 \Rightarrow x = -\dfrac{a}{2}$; $\quad e^{2x+a} = -2$ imposibil fiindcă funcţia exponenţială ia valori în R_+.

3. a) Fie matricele $A_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ ky_1 & x_1 \end{bmatrix}$ şi $A_2 = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ ky_2 & x_2 \end{bmatrix}$ cu x_1, x_2, y_1, y_2, k, numere întregi. Deci $A_1 \in M_k$, $A_2 \in M_k$. Suma lor este matricea $A = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ k(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ ky & x \end{bmatrix}$; $A \in M_k$, fiindcă suma a două numere întregi este un număr întreg.

b) Produsul $AB = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ ky_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ ky_2 & x_2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} x_1x_2 + ky_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ k(y_1x_2 + x_1y_2) & x_1x_2 + ky_1y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ ky & x \end{bmatrix} \in M_k$$

TESTUL 111

I. Prin ipoteză $\overline{a_ib_ic_i} = p_i \cdot 31 \Rightarrow 100a_i + 10b_i + c_i = 31 \cdot k_i$; $i = 1, 2, 3$. Pe de altă parte:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 100a_1 + 10b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & 100a_2 + 10b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & 100a_3 + 10b_3 + c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 31 \cdot k_1 \\ a_2 & b_2 & 31 \cdot k_2 \\ a_3 & b_3 & 31 \cdot k_3 \end{vmatrix} = 31 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} \in Z.$$

(S-a înmulțit prima coloană cu 100, a doua cu 10 și s-au adunat la coloana a treia).

În general pentru n numere a cîte n cifre divizibile cu k se poate proceda ca în cazul particular de sus. Proprietatea se menține indiferent de baza de numerație.

II. 1. a) Sistemul dat echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{y-x}{xy} = \alpha \\ y - x = \dfrac{1}{2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = \dfrac{1}{2\alpha} \\ xy = \dfrac{1}{2\alpha^2} \end{cases} \quad (\alpha \neq 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0)$$

cu soluțiile: $x_1 = \dfrac{-1}{\alpha}$; $y_1 = -\dfrac{1}{2\alpha}$ și $x_2 = +\dfrac{1}{2\alpha}$ $y_2 = \dfrac{1}{\alpha}$

b) Ecuația în y este: $2\alpha^2y^2 - \alpha y - 1 = 0$; $\Delta > 0$ pentru $(\forall)\alpha \in R$; $P < 0$ pentru $(\forall)\alpha \in R$; $S = \dfrac{1}{2\alpha}$. Deci pentru $\alpha \in (-\infty, 0)$ rădăcini reale distincte, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; $|x_1| > x_2$ pentru $\alpha \in (0, +\infty)$ rădăcini reale distincte $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; $|x_1| < x_2$. c) $\alpha \in \left(-\dfrac{1}{4}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

2. b) $A^2 - A = \begin{vmatrix} x^2 - x & 1 & 2x - 1 \\ 2x - 1 & x^2 - x & 1 \\ 1 & 2x - 1 & x^2 - x \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A^2 - A) = x(x+1)(x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3)$.

TESTUL 112

Dacă determinantul unui sistem omogen este diferit de zero, atunci sistemul admite numai soluția banală. Se calculează determinanții și se observă că toți sînt diferiți de zero.

TESTUL 113

1. a) Cum $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$ rezultă că sistemul admite și alte soluții în afară de soluția banală. Se notează, spre exemplu, $z = \lambda$ și se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} 4x + 3y = +7\lambda \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = \lambda.$$

b) $z = \lambda$; $y = -7\lambda$; $x = -10\lambda$. c) $x = -\lambda$; $y = \lambda$; $z = 0$. d) $x = \lambda$; $y = 0$; $z = \lambda$. e) $x = 13\lambda$; $y = 2\lambda$; $z = 7\lambda$. f) $x = -3\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$.

2. a) $\Delta = 7(m-1)$. Pentru $m \neq 1 \Rightarrow x = y = z = 0$. Pentru $m = 1 \Rightarrow x = -3\lambda$; $y = -\lambda$; $z = \lambda$.

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & m-1 & 2 & m \end{vmatrix} = -m$. Pentru $m \neq 0$ sistemul admite numai soluția $x = y = z = t = 0$. Pentru $m = 0$ notînd $t = \lambda \in R$, se rezolvă, spre exemplu, primele trei ecuații și se obține soluția,

$$x = -\frac{10\lambda}{3}; \quad y = -\frac{2\lambda}{3}; \quad z = 3\lambda; \quad t = \lambda.$$

TESTUL 114

1. a) Se folosește faptul că adunarea și înmulțirea sînt comutative în Q.

a) $x * y = x + y + 3xy = y + x + 3yx = y * x$.

b) $(x * y) * z = (x + x + 3xy) * z = (z + y + 3xy) + z + 3(x + y + 3xy)z = (x + y + z) + 3(xy + yz + zx) + 9xyz$, dar și $x * (y * z) = x * (y + z + 3yz) = (x + y + z) + 3(xy + yz + zx) + 9xyz$.

c) Fie $e \in Q$ elementul neutru. Deci trebuie ca $x * e = e * x = x$. Dar $x * e = x + e + 3xe \Rightarrow x + e + 3xe = x \Rightarrow e(1 + 3x) = 0$, deci pentru $x \neq -\frac{1}{3}$, elementul neutru este $e = 0$.

d) Notăm cu $\bar{x}$ elementul simetric al lui $x \in Q \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$. Trebuie ca $x * \bar{x} = 0$, adică $x + \bar{x} + 3x\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{-x}{1 + 3x}$. e) Mulțimea $Q \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ înzestrată cu legea $*$ este un grup abelian. f) $x * 3 = 2 \Leftrightarrow x + 3 + 9x = 2 \Rightarrow 10x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{10}$.

Altfel: Simetricul lui 3 este $\frac{-3}{10}$, deci $(x * 3) * \frac{-3}{10} = 2 * \frac{-3}{10} \Leftrightarrow x * \left(3 * \frac{-3}{10}\right) = 2 * \frac{-3}{10} \Leftrightarrow x = 2 * \frac{-3}{10} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{3}{10} - \frac{18}{10} \Rightarrow x = -\frac{1}{10}$; $(-5) * x = 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{7}$.

2. a) Fie cuplurile $(a, b) \in E$, $(c, d) \in E$, $(p, q) \in E$. Pentru a arăta că operația este asociativă, trebuie arătat că $(a, b) * [(c, d) * (p, q)] = [(a, b) * (c, d)] * (p, q)$; $(a, b) * [(c, d) * (p, q)] = (a, b) * [cp, cq + pd] = [a(cp), a(cq + pd) + b(cp)] = (acp, acq + apd + bcp)$; $[(a, b) * (c, d)] * (p, q) = (ac, ad + bc) * (p, q) = [(ac)p, (ac)q + (ad + bc)p] = (acp, acq + adp + bcp)$.

Folosind comutativitatea înmulțirii și adunării numerelor reale, rezultă asociativitatea operației $*$. b) Dacă există un element neutru, $e = (c, d)$ atunci trebuie ca: $(a, b) * (c, d) = (a, b)$, $(\forall)\ (a, b) \in E$. Dar $(a, b) * (c, d) = (a, b)$ conduce la $(ac, ad + bc) = (a, b) \Leftrightarrow ac = a$ și $ad + bc = b \Leftrightarrow c = 1$ și $d = 0$. Deci elementul neutru al lui E, față de operația $*$, este perechea $(1, 0)$. c) Aplicația f este surjectivă atunci și numai atunci cînd ecuația $(a, b) * (x, y) = (p, q)$ admite soluție pentru orice $(p, q) \in E$. Această condiție este echivalentă cu condiția ca sistemul $\begin{cases} ax = p \\ ay + bx = q \end{cases}$ să admită soluții întregi pentru orice $p \in Z$ și $q \in Z$.

TESTUL 115

1. a) $a \circ b = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = b \circ a.$

b) $$a \circ (b \circ c) = a \circ \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = a \circ \left(\frac{b^2 + c^2}{bc}\right) = \frac{a}{\dfrac{b^2 + c^2}{bc}} + \frac{\dfrac{b^2 + c^2}{bc}}{a} = \frac{abc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + c^2}{abc} = \frac{a^2b^2c^2 + (b^2 + c^2)^2}{abc(b^2 + c^2)}.$$

$$(a \circ b) \circ c = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \circ c = \left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right) \circ c = \frac{\dfrac{a^2 + b^2}{ab}}{c} + \frac{c}{\dfrac{a^2 + b^2}{ab}} = \frac{a^2 + b^2}{abc} + \frac{abc}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2 + a^2b^2c^2}{abc(a^2 + b^2)}.$$

Se observă, că: $a \circ (b \circ c) \neq (a \circ b) \circ c$.

c) Pentru ca legea să fie comutativă, trebuie ca:

$$\frac{a^2b^2c^2 + (b^2 + c^2)^2}{abc(b^2 + c^2)} = \frac{a^2b^2c^2 + (a^2 + b^2)}{abc(a^2 + b^2)}$$

și efectuînd calculele se obține condiția

$(a^2 - c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + b^4 - a^2b^2c^2) = 0 \Rightarrow c = \pm a$ sau

$$c = \frac{\pm |b| \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2b^2 - a^2 - b^2} \text{ și } |b| > 1, \ a^2b^2 \neq a^2 + b^2.$$

TESTUL 116

1. a) Două numere $a_1 + b_1\sqrt{2}$ și $a_2 + b_2\sqrt{2}$ din M_1 sînt egale dacă și numai dacă $a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$. Axiomele adunării:

A_1. $[(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] + (a_3 + b_3\sqrt{2}) = (a_1 + b_1\sqrt{2}) + [(a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_3 + b_3\sqrt{2})]$.

A_2. Se arată că elementul $0 + 0\sqrt{2} = 0$ este element neutru față de adunare.

A_3. $(\forall)\ a \in Z,\ b \in Z$ deci $(a + d\sqrt{2}) + (-a - b\sqrt{2}) = 0 + 0\sqrt{2} = 0$.

A_4. $(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\sqrt{2} = a_2 + a_1 + (b_2 + b_1)\sqrt{2} = (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2})$.

I_1. Înmulțirea este asociativă:

$$[(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2})] \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}) = (a_1 + b_1\sqrt{2})[(a_2 + b_2\sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2})].$$

I_2. $(\exists)$ elementul $1 + 0\sqrt{2} = 1$ astfel încît $(\forall)\ a + b\sqrt{2}$ are loc relația $(a + b\sqrt{2}) \cdot 1 = a + b\sqrt{2}$.

I_3. Fie $a + b\sqrt{2}$, $a + b\sqrt{2} \neq 0 + 0\sqrt{2}$; trebuie să găsim numărul $a' + b'\sqrt{2} \in M$ astfel încît: $(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow aa' + 2bb' + (ab' + ba')\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{a}{a^2 - (b\sqrt{2})^2} \\ b' = \dfrac{-b}{a^2 - (b\sqrt{2})^2} \end{cases}.$$

I_4. Înmulțirea este comutativă. Analog se demonstrează că și $M_2 = \{a - b\sqrt{2}\}$ este corp.

b) Pentru a arăta că cele două corpuri sînt izomorfe trebuie arătat că există aplicația bijectivă $f: M_1 \to M_2$ astfel încît:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall)$ $x \in M_1$ și $y \in M_1$.

Stabilim corespondența $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, care este bijectivă. Fie $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$ și $y = a_2 + b_2\sqrt{2}$. Atunci $f(x) = f(a_1 + b_1\sqrt{2}) = a_1 - b_1\sqrt{2}$ și $f(y) = f(a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_2 - b_2\sqrt{2}$, iar $f(x + y) = f[(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] = f[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}] = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\sqrt{2} = (a_1 - b_1\sqrt{2}) + (a_2 - b_2\sqrt{2}) = f(x) + f(y)$

$f(xy) = f[(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2})] = f[(a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}] = a_1a_2 + 2b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} = a_1a_2 + 2b_1b_2 - a_1b_2\sqrt{2} - a_2b_1\sqrt{2} = a_1(a_2 - b_2\sqrt{2}) - b_1\sqrt{2}(a_2 - b_2\sqrt{2}) = (a_1 - b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2} = f(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot f(a_2 + b_2\sqrt{2} = f(x) \cdot f(y)$.

2. a) Se verifică axiomele structurii algebrice de inel.

b) Se stabilește corespondența $a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$; $(\forall) a \in Z$. De exemplu:

$f(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ etc. **3.** Cum $\dfrac{\hat{3}}{\hat{4}} = \hat{3} \cdot \hat{4}^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{9}$,

$\dfrac{\hat{8}}{\hat{3}} = \hat{8} \cdot \hat{3}^{-1} = \hat{8} \cdot \hat{4} = \widehat{10}$, $\dfrac{\hat{7}}{\hat{6}} = \hat{3}$ și $\dfrac{\hat{9}}{\hat{2}} = \hat{9} \cdot \hat{6} = \widehat{10}$ rezultă

că $\left(\dfrac{\hat{3}}{\hat{4}} + \hat{5} + \dfrac{\hat{8}}{\hat{3}}\right) \cdot \dfrac{\hat{9}}{\hat{2}} = (\hat{9} + \hat{5} + \widehat{10} \cdot \hat{3}) \cdot \widehat{10} = (\hat{3} + \hat{8}) \cdot \widehat{10} =$

$= \hat{0} \cdot \widehat{10} = \hat{0}$.

TESTUL 117

1. a) Tabelele sînt:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

b) Înmulțind a doua ecuație cu $\hat{3}$ sistemul se scrie:

$$\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{1}x + \hat{5}y = \hat{2} \end{cases}$$

și scăzînd ecuațiile membru cu membru se obține

$$x = \hat{0}, \quad \text{deci} \quad \hat{5}y = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{5}^{-1} \cdot \hat{2} = \hat{5} \cdot \hat{2} = \hat{2}.$$

Așadar, soluția sistemului este: $x = \hat{0}$ și $y = \hat{2}$.

2. Se înmulțește prima coloană cu $-\hat{4}$ (adică $\hat{3}$) se adună la coloana a treia, și în determinantul obținut se scade coloana 4 din prima coloană obținîndu-se:

$$\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{6} & \hat{0} & \hat{6} & \hat{4} \end{vmatrix} = \hat{3}.$$

3. Cîtul este polinomul $\hat{4}x^2 + \hat{2}x + \hat{4}$, iar restul este $x + \hat{2}$

TESTUL 118

1. a) Cum $x \top y = (x-2)(y-2)+2$, din condițiile $x \in (2, +\infty)$ și $y \in (2, +\infty)$ rezultă că $x \top y \in (2, +\infty)$. Asociativitatea: $(x \top y) \top z = [xy - 2(x+y)+6] \top z = xyz - 2xy - 2yz - 2zx + 4x + 4y + 4z - 6$ și apoi se calculează $x \top (y \top z)$ obținîndu-se aceeași expresie. Comutativitatea rezultă imediat. Dacă se notează cu e elementul neutru din ecuația $x \top e = x \Leftrightarrow xe - 2(x+e) + 6 = x$ rezultă $e = 3 \in (2, +\infty)$. Din condiția $x \top x' = e$ se găsește elementul simetric $x' = \dfrac{2x-3}{x-2} \in (2, +\infty)$. b) Notăm cu $4'$ simetricul lui 4, adică $4' = \dfrac{2\cdot 4 - 3}{2} = \dfrac{5}{2}$. Avem $4 \top x = 8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4' \top (4 \top x) = 4' \top 8 \Leftrightarrow x = 4' \top 8 \Leftrightarrow x = 4'8 - 2(4' + 8) + 6 \Leftrightarrow x = 5$.

2. Tabelul este:

	I	*S*	*T*	*U*
I	*I*	*S*	*T*	*U*
S	*S*	*I*	*U*	*T*
T	*T*	*U*	*I*	*S*
U	*U*	*T*	*S*	*I*.

TESTUL 119

I. 1. Se alcătuiesc tabelele celor două legi de compoziție și se verifică axiomele grupului $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$;

$\omega_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

$\cdot$	ω_1	ω_2	ω_3
ω_1	ω_1	ω_2	ω_3
ω_2	ω_2	ω_3	ω_1
ω_3	ω_3	ω_1	ω_2

$\cdot$	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_1	R_2
R_1	R_1	R_2	R_0
R_2	R_2	R_0	R_1

$f: G \to G'$; $f: \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \to \{R_0, R_1, R_2\}$;

$f(\omega_1) = R_0, f(\omega_2) = R_1, f(\omega_3) = R_2$, deci f este bijectivă. $f(\omega_2 \cdot \omega_3) = f(\omega_0) = R_0$, dar $R_0 = R_1 \cdot R_2 = f(\omega_2) \cdot f(\omega_3)$.

II. Se alcătuiesc cele două tablouri și se observă că între ele nu se poate stabili o corespondență biunivocă.

TESTUL 120

Se verifică axiomele spațiului vectorial pentru fiecare mulțime. De exemplu, să notăm cu $M_{m,n}$ mulțimea matricelor cu m linii și n coloane. Dacă $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{m,n}$, $C \in M_{m,n}$ atunci și $A + B \in M_{m,n}$.

a_1) $A + B = B + A$ (comutativitate);

a_2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativitate);

a_3) Există o matrice nulă $0_{m,n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ coloane}} \Bigg\} m$ linii

astfel că $(\forall) A \in M_{m,n}$, avem $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$.

a_4) Oricare ar fi matricea $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2\dots m \\ j=1,2\dots n}}$ există matricea $-A = [-a_{ij}]_{\substack{i=1,2\dots m \\ j=1,2\dots n}} \in M_{m,n}$ astfel încît $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}$.

i_1) Există $1 \in R$ astfel încît oricare ar fi $A \in M_{m,n}$ avem $1 \cdot A = A$.

i_2) Fie $\alpha \in R$, $\beta \in R$ atunci $(\forall) A \in M_{m,n}$ avem: $(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$.

i_3) $\begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot A = (\alpha \cdot A) + (\beta \cdot A) \\ \alpha \cdot (A + B) = (\alpha \cdot A) + (\alpha \cdot B) \end{cases}$ $(\forall) \alpha \in R$, $(\forall) \beta \in R$, $(\forall) A \in M_{m,n}$, $(\forall) B \in M_{m,n}$.

3. Elementul neutru față de adunare este funcția identic nulă pe $[a, b]$. **6.** Funcțiile care au proprietatea din enunț se numesc *funcții lipschitziene*. Se notează cu L mulțimea funcțiilor care au proprietatea lui *Lipschitz*. Dacă $f_1 \in L$

și $f_2 \in L$ atunci există constantele k_1 și k_2 astfel ca $(\forall)\ x_1 \in [a, b]$ și $x_2 \in [a, b]$ au loc relațiile: $|f_1(x_1) - f_1(x_2)| \leqslant k_1 |x_1 - x_2|$ și $|f_2(x_1) - f_2(x_2)| \leqslant k_2 |x_1 - x_2|$ și $|(f_1 + f_2)(x_1) - (f_1 + f_2)(x_2)| = |f_1(x_1) - f_1(x_2) + f_2(x_1) - f_2(x_2)| \leqslant |f_1(x_1) - f_1(x_2)| + |f_2(x_1) - f_2(x_2)| \leqslant (k_1 + k_2)|x_1 - x_2|$. Deci și $f_1 + f_2 \in L$.

Restul axiomelor se arată fără dificultate.

TESTUL 121

1. Suma a două polinoame de gradul n nu este neapărat un polinom de gradul n. **2.** Toate slouțiile sistemului formează un spațiu vectorial, iar elementul nul este vectorul cu n zerouri (soluția banală). **3.** Este o ecuație diferențială liniară de ordinul II, cu coeficienți constanți și mulțimea soluțiilor este de forma $x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{3t}$. Suma a două soluții este tot o soluție a ecuației; produsul dintre o soluție $x(t)$ cu un număr $\alpha + i\beta$, este tot o soluție. Se verifică apoi axiomele spațiului. **4.** Dacă $x \in S$, $y \in S$ atunci $|\xi_n + \eta_n|^2 \leqslant$

$$\leqslant 2(|\xi_n|^2 + |\eta_n|^2) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^2 < \infty, \text{ deci } x + y \in S.$$

La fel dacă $\alpha \in R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha \xi_n|^2 = |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$, deci

$\alpha x \in S$. După aceea se verifică axiomele spațiului vectorial. **5.** Dacă $(a_1, a_2) \in R^2$ și $(b_1, b_2) \in R^2$ atunci $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in R$ (regula paralelogramului). Dacă $\alpha \in R$ atunci $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2) \in R$. Elementul nul față de adunare este $(0, 0)$. **6.** Dacă $z_1 = a_1 + b_1 i$ și $z_2 = a_2 + b_2 i$, $a_1 \in R$, $a_2 \in R$, $b_1 \in R$, $b_2 \in R$ atunci $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ este tot un număr complex. Dacă $\alpha \in R$ atunci $\alpha z_1 = \alpha(a_1 + b_1 i) = (\alpha a_1) + (\alpha b_1)i$, este tot un număr complex. Apoi se verifică axiomele spațiului vectorial.

TESTUL 122

1. Vectorii $x_1, x_2 \ldots x_n$ sînt liniar independenți dacă în combinația liniară $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ toți α_i, $(i = 1, 2 \ldots n)$ sînt nuli, adică $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0$. În cazul de față, din relația $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$ rezultă

sistemul de ecuații omogene $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$ al cărui

determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ este diferit de zero (matricea coeficienților are rangul 4). Atunci sistemul admite numai soluția banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, deci sistemul de vectorii x_1, x_2, x_3, x_4 este liniar independent. Altfel: uneori un vector este scris sub forma unei matrice coloană. În cazul

de față: $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

și atunci relația $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$ se scrie:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ -\alpha_4 \\ \alpha_4 \\ -\alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (1) $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$ adică sistemul obținut anterior.

Altfel, folosind notațiile matriceale putem scrie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

unde proveniența matricelor este evidentă. **2.** În toate cazurile se va face același raționament ca la punctul precedent.

TESTUL 123

Dacă un spațiu vectorial V conține n vectori liniar independenți (n, fiind un întreg pozitiv și finit) și oricare $n + 1$ vectori ai acestui spațiu sînt liniar dependenți, atunci spațiul are dimensiunea n. Altfel spus, dimensiunea unui spațiu vectorial V este numărul maxim de vectori liniar independenți. Într-un spațiu vectorial n-dimensional, vectorii $\{e_1, e_2, e_3 \ldots e_n\}$ formează o bază dacă sînt liniar independenți. Dacă la mulțimea vectorilor $\{e_1, e_2 \ldots e_n\}$ se mai adaugă un vector x din spațiul n-dimensional V, atunci vectorii $\{e_1, e_2 \ldots e_n, x\}$ sînt liniar dependenți, conform definiției de mai sus. Deci vectorul x poate fi exprimat ca o combinație liniară a vectorilor bazei. Așadar orice vector x din spațiul n dimensional V poate să fie scris sub forma $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$. Este evident că această scriere este unică. Așadar, în cazul exercițiului 1 trebuie văzut dacă vectorii de la punctele a) b) c) d) sînt liniar independenți. a) Cele trei polinoame sînt: $e_1 = 1 + 0t + 0t^2$, $e_2 = 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2$, $e_3 = 0 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2$ deci imaginile lor sînt $e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$e'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, iar vectorii $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ sînt liniar

independenţi în R^3. Într-adevăr $\alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \alpha_3 e_3' = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = 0 \\ \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_3 & = 0. \end{cases}$$

Deci $\{1, t, t^2\}$, formează o bază în spaţiul polinoamelor de grad cel mult doi. b) Polinoamele sînt: $x_1 = 1 - t$, $x_2 = t - t^2$, $x_3 = 1 - t^2$ şi $\alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \alpha_3 e_3' = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overset{(1)}{\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}}$$

şi cum $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ rezultă că sistemul admite şi alte soluţii în afara soluţiei banale. Atunci vectorii $x_1 = 1 - t$, $x_2 = t(1 - t)$, $x_3 = 1 - t^2$ sînt liniar dependenţi, deci nu constituie o bază în spaţiul vectorial L.

c), d) Vectorii $\{t^2 - 1,\ t^2 + 3t - 2,\ t^2 - 1\}$ şi $\{1 + t,\ t,\ 2t^2\}$ sînt baze în L. **2.** Se observă că $2f_4 = f_1 + f_2 + f_3$, de unde rezultă liniar dependenţa. Pentru a arăta că sistemele de vectori $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\{f_1, f_2, f_4\}$, $\{f_1, f_3, f_4\}$, $\{f_2, f_3, f_4\}$ sînt baze în R^3 se arată liniar independenţa vectorilor ce le compun.

TESTUL 124

Pentru soluţionarea exerciţiilor 1 şi 2 din acest test se poate folosi şi lema substituţiei: „Fie $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ o bază a spaţiului vectorial V peste corpul K şi $v \in V$, unde $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Fie $B^* = (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \ldots, e_n)$.

1. B^* este bază a lui V dacă şi numai dacă $\alpha_i \neq 0$.

2. Dacă B^* este o bază a lui V, atunci coordonatele $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*$ în baza B^* ale unui vector $x \in V$ se exprimă în funcție de coordonatele sale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ din baza B prin relațiile: $\lambda_i^* = \dfrac{\lambda_i}{\alpha_i}$;

$$\lambda_j^* = \lambda_j - \frac{\alpha_j \lambda_i}{\alpha_i} \quad \text{pentru } i \neq j.$$

1. a) și b):

	f_1	f_2	x
e_1	$\boxed{3}$	6	1
e_2	2	5	2

$\rightarrow$

	f_1	f_2	x
f_1	1	2	$\frac{1}{3}$
e_2	0	$\boxed{1}$	$\frac{4}{3}$

$\rightarrow$

	f_1	f_2	x
f_1	1	0	$\frac{-7}{3}$
f_2	0	1	$\frac{4}{3}$

Cum (e_1, e_2) este baza canonică în R^2, conform lemei substituției rezultă că și (f_1, e_2), (f_1, f_2) sînt baze în R^2. În ultimul dintre tabelele de mai sus coloana lui x, $\begin{bmatrix} \frac{-7}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ reprezintă coordonatele lui x în baza (f_1, f_2).

2. a) și b):

	f_1	f_2	f_3	x
e_1	$\boxed{1}$	1	1	1
e_2	1	0	1	2
e_3	0	1	1	3

$\rightarrow$

	f_1	f_2	f_3	x
f_1	1	1	1	1
e_2	0	$\boxed{-1}$	0	1
e_3	0	1	1	3

$\rightarrow$

	f_1	f_2	f_3	x
f_1	1	0	1	2
f_2	0	1	0	-1
f_3	0	0	$\boxed{1}$	4

$\rightarrow$

	f_1	f_2	f_3	x
f_1	1	0	0	-2
f_2	0	1	0	-1
f_3	0	0	1	4

Rezultă că $x = -2f_1 - f_2 + 4f_3$.

3. În testul 96, exercițiul 1 a) se cere să se arate că acești vectori constituie o bază în L. Componentele vectorilor

x_4 și x_5 în aceasta baza sînt: $x_4 = \left(1, -2, \frac{1}{2}\right)$ și $x_5 = \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$. Adică: $x_4 = x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3$ și $x_5 = x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3$. 4. Avem $x = \frac{5}{4}f_1 + \frac{1}{4}f_2 - \frac{1}{4}f_3 - \frac{1}{4}f_4$.

TESTUL 125

1. Se procedează ca la exercițiul 3 din testul 124. **2.** Fie $x = (\lambda_1, \lambda_2)$ un vector oarecare din R^2 exprimat în baza $\{e_1, e_2\}$. Dacă notăm cu (η_1, η_2) componentele aceluiași vector în baza $\{f_1, f_2\}$ atunci avem: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \eta_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\eta_1 + 6\eta_2 \\ 2\eta_1 + 7\eta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\eta_1 + 6\eta_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2\eta_1 + 7\eta_2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{9}(\lambda_1 - 4\lambda_2) \\ \eta_2 = \frac{1}{9}(\lambda_1 + 5\lambda_2) \end{cases}$$

formule care ne dau trecerea de la baza $\{e_1, e_2\}$ la baza $\{f_1, f_2\}$.

TESTUL 126

1. a) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sînt componentele unui vector oarecare din R^3 în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ și η_1, η_2, η_3 sînt componentele aceluiași vector în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ atunci: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3 \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$= \eta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \eta_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

2. a), b)

	f_1	f_2	f_3	f_4	x_1	x_2	x_3
e_1	$\boxed{1}$	0	1	1	1	1	1
e_2	0	0	−1	−1	0	2	−1
e_3	0	0	1	−1	1	3	−1
e_4	1	1	−1	1	1	4	−1

→

	f_1	f_2	f_3	f_4	x_1	x_2	x_3
f_1	1	0	1	1	1	1	1
e_2	0	0	$\boxed{-1}$	−1	0	2	−1
e_3	0	0	−1	−1	1	3	−1
e_4	0	1	−2	0	0	3	−2

→

	f_1	f_2	f_3	f_4	x_1	x_2	x_3
f_1	1	0	0	0	1	3	0
f_3	0	0	1	1	0	−2	1
e_3	0	0	0	$\boxed{-2}$	1	5	−2
e_4	0	1	0	2	0	−1	0

→

	f_1	f_2	f_3	f_4	x_1	x_2	x_3
f_1	1	0	0	0	1	3	0
f_3	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
f_4	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1
e_4	0	$\boxed{1}$	0	0	1	4	−2

→

	f_1	f_2	f_3	f_4	x_1	x_2	x_3
f_1	1	0	0	0	1	3	0
f_3	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
f_4	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1
f_2	0	1	0	0	1	4	−2

Rezultă că:

$$x_1 = f_1 + f_2 + \frac{1}{2} f_3 - \frac{1}{2} f_4;$$

$$x_2 = 3f_1 + 4f_2 + \frac{1}{2} f_3 - \frac{5}{2} f_4; \quad x_3 = -2f_2 + f_4.$$

4. a) Fie e_1, e_2, e_3 vectorii bazei canonice a lui R^3. Folosind lema substituției se obține:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	$\boxed{1}$	3	−2	−1	3
e_2	−1	2	−3	−4	7 →
e_3	2	1	1	3	−4

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	3	−2	−1	3
→ e_2	0	$\boxed{5}$	−5	−5	10 →
e_3	0	−5	5	5	−10

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	0	1	2	−3
v_2	0	1	−1	−1	2 .
e_3	0	0	0	0	0

Cum (e_1, e_2, e_3) este bază a lui R^3 conform lemei substituției rezultă succesiv că (v_1, e_2, e_3) și (v_1, v_2, e_3) sînt baze ale lui R^3. Deci (v_1, v_2) este subsistem maximal liniar independent al sistemului $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ și deci rang $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = 2$.

b) Rang $(v_1, v_2, v_3, v_4) = 2$ și un subsistem maximal liniar independent al sistemului (v_1, v_2, v_3, v_4) este (v_1, v_2).

TESTUL 127

1. Pentru punctele a) și b) se procedează ca la exercițiul 1 din testul 123.

c) Fie $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ și $g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, două polinoame din P_3. Rezultă că $T(f) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4$ și $T(g) = b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4$.

$T(f+g)$: $T[(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+$ $+(a_3+b_3)x^3]=(a_0+b_0)x+(a_1+b_1)x^2+(a_2+b_2)x^3+$ $+(a_3+b_3)x^4=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+b_0x+b_1x^2+$ $+b_2x^3+b_3x^4=T(f)+T(g)$.

$T(\alpha f)=T(\alpha a_0+\alpha a_1x+\alpha a_2x^2+\alpha a_3x^3)=\alpha a_0x+\alpha a_1x^2+$ $+\alpha a_2x^3+\alpha a_3x^4=\alpha(a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4)=\alpha T(f)$.

d) Se verifică faptul că D este o aplicație liniară:

$D(f)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$; $D(g)=b_1+2b_2x+3b_3x^2$; $D(f+g)=D(f)+D(g)$; $D(\alpha f)=\alpha D(f)$.

$TD(f)=T(a_1+2a_2x+3a_3x^2)=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3$.

$DT(f)=D(a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4)=a_0+2a_1x+$ $+3a_2x^2+4a_3x^3$. Rezultă că $TD\neq DT$.

$DT(f)-TD(f)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

TESTUL 128

1. a) $T_1x=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\9\end{bmatrix}$.

b) $T_2x=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\1&2&0\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\5\\8\end{bmatrix}$.

c) $(T_1+T_2)x=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&3&1\\0&4&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ etc.

2. Transformarea T se numește inversa transformării M dacă $TM=MT=I$ (transformarea identică). Orice transformare liniară reprezentată printr-o matrice $n\times n$ cu determinantul nenul, posedă o inversă.

TESTUL 129

1. a) Matricea asociată transformării T este transpusa matricei

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ adică } T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) $T(x) = T[2e_1 - e_2 + 3e_3] = 2T(e_1) - T(e_2) + 3T(e_3) = 2[-f_1 + f_2] - [2f_1 + 3f_2] + 3[-f_1 - 2f_2] = -7f_1 - 7f_2$.

2. Notăm cu A matricea de trecere de la prima bază la cea de-a doua:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă T_f este matricea operatorului în baza a doua se știe că:

$$[T_f] = A^{-1}[T] \cdot A \quad \text{și cum} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot [T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [T_f] = A^{-1}[T] \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

TESTUL 130

1. *Metoda I.* Dacă matricea $A = [a_{ij}]$ este de tipul $m \times n$ notăm cu $p = \min(m, n)$. Cu liniile și coloanele acestei matrice se pot forma mai mulți determinanți de ordinul p. Dacă cel puțin unul dintre ei este diferit de zero, atunci rangul matricei este p. Dacă toți determinanții de ordinul p sînt nuli, atunci cu liniile și coloanele matricei se construiesc determinanții de ordinul $p - 1$. Dacă cel puțin unul dintre

aceştia este diferit de zero rangul matricei este $p-1$. Dacă nu, se continuă procedeul pînă se găseşte un determinant de ordinul r diferit de zero.

Observaţie. Această metodă după cum se vede necesită un volum mare de calcul şi este destul de greoaie. 1. De exemplu, în cazul matricei A; se calculează următorii determinanţi de ordinul 4:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Deoarece toţi sînt nuli rangul matricei nu este 4. În final se găseşte un determinant de ordinul 3 nenul.

Metoda a II-a. Se consideră vectorii coloană C_i^A ai spaţiului vectorilor coloană R^4:

$$c_1^A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_2^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_3^A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_4^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c_5^A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şi se caută un subsistem maximal liniar independent în sistemul $(c_1^A, c_2^A, c_3^A, c_4^A, c_5^A)$, al cărui rang reprezintă tocmai

rangul matricei A. (vezi testul 126 ex. 4). Fie e_1, e_2, e_3, e_4 vectorii bazei canonice a spațiului vectorilor coloană R^4.

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A
e_1	$\boxed{2}$	0	2	0	2
e_2	0	1	0	1	0
e_3	2	1	0	2	1
e_4	0	1	0	1	0

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A
c_1^A	1	0	1	0	1
e_2	0	$\boxed{1}$	0	1	0
e_3	0	1	-2	2	-1
e_4	0	1	0	1	0

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A
c_1^A	1	0	1	0	1
c_2^A	0	1	0	1	0
e_3	0	0	$\boxed{-2}$	1	-1
e_4	0	0	0	0	0

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A
c_1^A	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
c_2^A	0	1	0	1	0
c_3^A	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_4	0	0	0	0	0

Rezultă că c_1^A, c_2^A, c_3^A este un subsistem maximal liniar independent în sistemul vectorilor coloană $c_1^A, c_2^A, c_3^A, c_4^A, c_5^A$ de unde rang A = rang $(c_1^A, c_2^A, c_3^A, c_4^A, c_5^A) = 3$.

Metoda a III-a. Se numesc transformări elementare următoarele operații:

1. Schimbarea a două linii (coloane) între ele.
2. Înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un număr diferit de zero.
3. Adunarea la elementele unei linii (sau coloane) elementele altei linii (sau coloane) înmulțite cu un număr $\alpha \neq 0$.

Prin transformări elementare într-o matrice se obține o altă matrice echivalentă cu prima din punct de vedere al rangului. În sfîrșit, orice matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$ prin

transformări elementare poate să fie adusă la forma canonică, diagonală

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 \end{bmatrix}$$

Adică elementele $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{rr} = 1$ și toate celelalte elemente sînt nule. Numărul $r \leqslant \min(m, n)$ este rangul matricei. Cu alte cuvinte, rangul matricei inițiale este egal cu numărul elementelor egale cu 1 pe diagonala matricei sub „forma canonică diagonală": De exemplu, în matricea A: elementul $a_{11} \neq 0$, pentru a obține 0 pe prima linie și pe prima coloană (cu excepția lui a_{11}) procedăm astfel: se împarte cu 2 prima linie, se scade prima linie înmulțită cu 2 din a treia și apoi se scade prima coloană din a treia și a cincea. În continuare se procedează în același mod, căutînd ca pe linia a doua și coloana a doua să rămînă numai $a_{22} = 1$, diferit de zero. În fine, se fac transformări elementare astfel ca pe linia a treia și coloana atreia să rămînă doar elementul $a_{33} = 1$ diferit de zero. Astfel putem scrie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deci rangul matricei A este 3.

3. Matricea $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 6 & -13 & -22 & -8 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 11 & 9 \\ 4 & -10 & 3 & -19 & -25 & -10 \\ 2 & 0 & 5 & -12 & -11 & -6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -13 & -22 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 11 & 9 \\ 0 & -10 & 3 & -19 & -25 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & -12 & -11 & -6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -13 & -22 & -8 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 11 & 9 \\ 0 & 7 & 3 & -19 & -25 & -10 \\ 0 & -5 & 5 & -12 & -11 & -6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -76 & -121 & -39 \\ 0 & 0 & -39 & 72 & 129 & 46 \\ 0 & 0 & 35 & -77 & -121 & -46 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

Se obține în final:

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

deci rang $C = 5$.

$$5.\ E \sim \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

TESTUL 131

Se procedează ca în cazul matricelor de la testul 130. La matricea C unde elementul a_{22} este zero se schimbă, spre exemplu, între ele coloana a II-a cu coloana a IV-a.

TESTUL 132

1. *Metoda I*. O matrice de forma nxn, este inversabilă dacă și numai dacă este nesingulară. Deci se calculează $\det A = 10 \neq 0 \Rightarrow$ matricea A este nesingulară. Pentru calculul inversei se poate proceda astfel: se scrie matricea transpusă:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Se calculează complemenții algebrici ai elementelor matricei transpuse $\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, unde Δ_{ij} este minorul elementului a_{ij}. În cazul de față avem:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11} = 4 & \Gamma_{12} = -4 & \Gamma_{13} = -2 \\ \Gamma_{21} = 2 & \Gamma_{22} = 3 & \Gamma_{23} = -1. \\ \Gamma_{31} = -4 & \Gamma_{32} = -1 & \Gamma_{33} = 7 \end{array}$$

c) Se formează matricea reciprocă

care în cazul de față este $A^* = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

d) Matricea inversă este $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$; deci în final se obține:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Se verifică ușor că $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Metoda a II-a. Deoarece metoda de mai sus comportă multe calcule greoaie, este mai indicat să se folosească lema substituției. Se procedează astfel:

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_1^E	c_2^E	c_3^E
e_1	[2]	3	1	1	0	0
e_2	−1	2	0	0	1	0
e_3	1	2	2	0	0	1

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_1^E	c_2^E	c_3^E
c_1^A	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
e_2	0	[$\frac{7}{2}$]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
e_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_1^E	c_2^E	c_3^E
c_1^A	1	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0
c_2^A	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0
e_3	0	0	[$\frac{10}{7}$]	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_1^E	c_2^E	c_3^E
c_1^A	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
c_2^A	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
c_3^A	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$

Rezultă că:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

Observație: Atunci cînd se calculează inversa unei matrice folosind lema substituției se poate începe calculul fără a verifica nesingularitatea matricei. Dacă matricea este singulară, nu toți vectorii c_j^A, $1 \leqslant j \leqslant 3$ pot să fie plasați în locul vectorilor e_i, $i = 1, 2, 3$ și astfel nu se mai poate continua calculul. Algoritmul de mai sus poate să fie scris folosind transformările elementare asupra unei matrici.

Vom exemplifica această metodă (expusă foarte succint) prin calculul inverselor matricelor B, C, F. **2.** Cum $\det B \neq 0$ pentru matricea B scriem:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

împărțind prima linie cu 2 se obține matricea echivalentă din punct de vedere al rangului:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Se înmulțește prima linie cu -1 și se adună la a doua, și apoi cu -3 și se adună la a treia, obținîndu-se:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

se împarte linia a doua cu $\frac{5}{2}$ şi se obţine:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A doua linie înmulţită cu $-\frac{5}{2}$ se adaugă la ultima, obţinîndu-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right];$$

ultima linie înmulţită cu $-\frac{1}{2}$ se adaugă la prima şi înmulţită cu $\frac{7}{5}$ se adaugă la a doua obţinîndu-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

A doua linie înmulţită cu $\frac{1}{2}$ se adaugă la prima şi avem în final:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\text{Deci } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Cum $\det C \neq 0$, prin transformări elementare, se obține succesiv:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{9} & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{5} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{5} \end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

TESTUL 133

1. Deoarece matricea A este nesingulară admite ca inversă matricea

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{30} \end{bmatrix}.$$

Pentru rezolvarea sistemului $Ax = B$ se înmulțește ecuația la stînga cu A^{-1} și se obține $x = A^{-1}B$.

2. $x = 3,\ y = 2,\ z = 1.$

3. $x = -2,\ y = 2,\ z = -3,\ t = 3.$

TESTUL 134

1. Se notează cu

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&-1&1\\-1&-1&2\\1&-1&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}6\\2\\3\\3\\-4\\-2\end{bmatrix},$$

$$A^e=\begin{bmatrix}1&1&1&6\\1&-1&1&2\\2&-1&1&3\\-1&-1&2&3\\1&-1&-1&-4\\-1&1&-1&-2\end{bmatrix};$$

rang $A=3$ și fie $D=\det B=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&-1&1\end{vmatrix}=2\neq 0.$

Conform teoremei lui *Rouché* sistemul este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sînt nuli. Minorii caracteristici sînt determinați de ordin $r+1$ (unde r este rangul matricii A) și se obțin dintr-un minor de ordinul r diferit de zero prin bordare. În cazul de față minorii de ordinul 4 care bordează pe D sînt:

$$\Delta_{car_1}=\begin{vmatrix}1&1&1&6\\1&-1&1&2\\2&-1&1&3\\-1&-1&2&3\end{vmatrix};\quad \Delta_{car_2}=\begin{vmatrix}1&1&1&6\\1&-1&1&2\\2&-1&1&3\\1&-1&-1&-4\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{car_3}=\begin{vmatrix}1&1&1&6\\1&-1&1&2\\2&-1&1&3\\-1&+1&-1&-2\end{vmatrix}.$$

Se constată că $\Delta_{car_1}=\Delta_{car_2}=\Delta_{car_3}=0$, și astfel rezultă că sistemul este compatibil determinat și are soluția: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Metoda a II-a. Conform teoremei *Kronecker-Capelli* sistemul este compatibil dacă și numai dacă rang A = = rang A^e. Se determină rangul matricei extinse A^e (vezi testul 130) și se găsește rang $A^e = 3$. *Metoda a III-a.* Pentru rezolvarea sistemului se poate folosi metoda eliminării parțiale a lui *Gauss* sau metoda eliminării totale *Gauss-Jordan*. Mai jos se expune metoda eliminării totale.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rezultă: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

2) *Metoda I.* Se notează cu A matricea coeficienților:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

și prin una din metodele de la testul 130 se calculează rang $A = 3$, și rang $A^e = 3$. Deci sistemul este compatibil. Fie minorul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Necunoscutele x_4 și x_5 sînt necunoscute secundare, iar sistemul este compatibil nedeterminat. Se notează necunoscutele secundare x_4 respectiv x_5 cu α și β.



şi se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 - \alpha - \beta \\ -x_1 + x_2 \qquad = -2 + 3\alpha - 5\beta \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 6 - \alpha + \beta, \end{cases}$$

care are soluţia

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\alpha + 2\beta \\ x_2 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\alpha - 3\beta; \quad \alpha \in R, \quad \beta \in R. \\ x_3 = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\alpha \\ x_4 = \alpha \\ x_5 = \beta \end{cases}$$

Metoda a II-a. Se ştie că mulţimea soluţiilor sistemului neomogen este de forma $x^0 + N_A$, unde x^0 este o soluţie particulară a sistemului neomogen, iar N_A este mulţimea tuturor soluţiilor sistemului omogen asociat. În cazul de faţă sistemul omogen asociat este:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x \ + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$$

adică $Ax = 0$ unde

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$; rang $A = 3$. Deoarece $3 = \text{rang } A = \text{rang } (c_1^A, c_2^A, c_3^A, c_4^A, c_5^A)$ înseamnă că submatricea $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

este bază a matricei A. Notînd cu $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ rezultă

că matricea A se partiționează în două blocuri $A = (B, S)$, iar vectorul x se partiționează astfel:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_S \end{bmatrix} \text{ unde } x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \text{iar} \quad x_S = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Deci

$$Ax = 0 \Rightarrow Bx_B + Sx_S = 0 \Rightarrow x_B = -B^{-1} Sx_S.$$

În cazul de față $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ (pentru calculul lui B^{-1} se folosește una din metodele expuse la testul 132).

Notăm cu

$$C = -B^{-1} S = -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 \\ \frac{5}{3} & -3 \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului omogen se scrie sub forma: $x = \alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}$ unde $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ formează un sistem de generatori pentru subspațiul N^A (mulțimea soluțiilor sistemului

omogen) şi sînt coloanele matricei $\begin{bmatrix} C \\ E \end{bmatrix}$, unde C este matricea de mai sus, iar E matrcea unitate de ordin doi. În cazul de față

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Baza $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Deci soluția generală a sistemului omogen este $Tx = \left(-\frac{4}{3}\alpha, \ \frac{5}{3}\alpha, \ -\frac{4}{3}\alpha, \ \alpha, \ 2\beta, \ -3\beta, \ \beta\right)$. Deci trebuie reținut că rezolvarea unui sistem omogen $Ax = 0$ revine la determinarea unui sistem fundamental de soluții. Rezolvarea sistemului omogen se poate face şi folosind lema substituției. Se notează cu (e_1, e_2, e_3) baza canonică a lui R^3 şi se fac calculele:

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A
e_1	[1]	1	1	1	1
e_2	−1	1	0	−3	5
e_3	2	1	0	1	−1

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A
c_1^A	1	1	1	1	1
e_2	0	[2]	1	−2	6
e_3	0	−1	−2	−1	−3

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A
c_1^A	1	0	$\frac{1}{2}$	2	−2
c_2^A	0	1	$\frac{1}{2}$	−1	3
e_3	0	0	[$-\frac{3}{2}$]	−2	0

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A
c_1^A	1	0	0	$\frac{4}{3}$	−2
c_2^A	0	1	0	$-\frac{5}{3}$	3
c_3^A	0	0	1	$\frac{4}{3}$	0

Din ultimul tabel rezultă că:

$$c_4^A = \frac{4}{3} c_1^A - \frac{5}{3} c_2^A + \frac{4}{3} c_3^A \text{ și } c_5^A = -2c_1^A + 3c_2^A$$

adică:

$$-\frac{4}{3} c_1^A + \frac{5}{3} c_2^A - \frac{4}{3} c_3^A + c_4^A = 0 \quad \text{și} \quad 2c_1^A - 3c_2^A + c_5^A = 0.$$

Coeficienții din relațiile precedente sînt respectiv componentele soluțiilor $x^{(1)}$, $x^{(2)}$. Revenind la sistemul neomogen

$$Ax = L \text{ unde } L = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ rezultă că}$$

$$x_B = B^{-1} L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Deci soluția de bază corespunzătoare lui B este:

$$x^0 = \begin{bmatrix} B^{-1} L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

care este nedegenerată.

Conform celor spuse la început soluția generală a sistemului neomogen este $y = x^0 + \alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}$, deci:

$$Ty = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\alpha + 2\beta,\ \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\alpha - 3\beta,\ -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\alpha,\ \alpha,\ \beta\right).$$

Metoda a III-a. Se poate rezolva direct sistemul neomogen aplicînd lema substituției. În calculul făcut pentru sistemul omogen atașat, folosind lema substituției, introducem vectorul coloană L:

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A	L
e_1	$\boxed{1}$	1	1	1	1	3
e_2	-1	1	0	-3	5	-2
e_3	2	1	0	1	-1	6

→

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A	L
c_1^A	1	0	0	$\frac{4}{3}$	-2	$\frac{8}{3}$
c_2^A	0	1	0	$-\frac{5}{3}$	3	$\frac{2}{3}$
c_3^A	0	0	1	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

3. Sistemul este compatibil și unic determinat pentru $m \in R \setminus \{-1, 1\}$. Pentru $m = 1$ sistemul este compatibil și nedeterminat, iar pentru $m = -1$ este incompatibil. **4.** Pentru $\lambda \in R \setminus \{2, 6\}$ sistemul este compatibil și determinat. Pentru $\lambda = 6$ sistemul este compatibil și nedeterminat, iar pentru $\lambda = 2$ sistemul este incompatibil.

TESTUL 135

Pentru rezolvarea sistemelor omogene 1, 3, 4 se recomandă și studierea metodei a doua de la exercițiul 2 din testul 134.

TESTUL 136

1. Înmulțim prima ecuație a sistemului respectiv cu -2, -1, -2 și o adunăm la ecuațiile a doua, a treia și a patra. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ -x_2 - 9x_3 = 16 \\ 2x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_2 - 13x_3 = 28 \end{cases}$$

A doua ecuație înmulțită cu 2 se adună la a treia ecuație și tot a doua ecuație se adună la a patra obținîndu-se:

$$(\alpha)\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ \quad -x_2 - 9x_3 = 16 \Rightarrow x_3 = -2,\ x_2 = 2,\ x_1 = 1. \\ \quad\quad -22x_3 = 44 \\ \quad\quad -22x_3 = 44 \end{cases}$$

Aceste operații pot fi scrise mai elegant folosind transformările elementare ale matricelor astfel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -13 & 28 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \\ 0 & 0 & -22 & 44 \\ 0 & 0 & -22 & 44 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \\ 0 & 0 & -22 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ și}$$

din ultima matrice rezultă sistemul (α).

2. $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_4 = -2 \end{cases}$$

Sistemul este compatibil și nedeterminat. Soluțiile sînt de forma

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha - \lambda \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -3 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & 0 & -4 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$

deci sistemul este incompatibil.

TESTUL 137

Observație. Vectorul program are două elemente și totdeauna poate să fie folosită metoda geometrică. În cele ce urmează vor fi soluționate în detaliu primele două probleme de programare liniară, iar celorlalte li se va indica rezultatul.

1. Din condițiile impuse, se observă că interesează doar punctele $M(x, y)$ situate în primul cadran $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. Se construiesc dreptele (AB) $6x + y = 6$, (BC) $4x + 3y = 12$, (CD) $x + 4y = 9$; și se determină porțiunea hașurată ale cărei puncte satisfac condițiile impuse (fig. 56). Cum ecuația $f = 2x + 3y$ determină o familie de drepte (Δ), problema s-a redus la determinarea dreptei din familia Δ, care satisface condiția impusă. Se observă că dreapta $f = 2x + 3y$ (f, joacă rol de parametru), taie axa Oy în punctul $P\left(0, \dfrac{f}{3}\right)$ și orice dreaptă din familie împarte re-

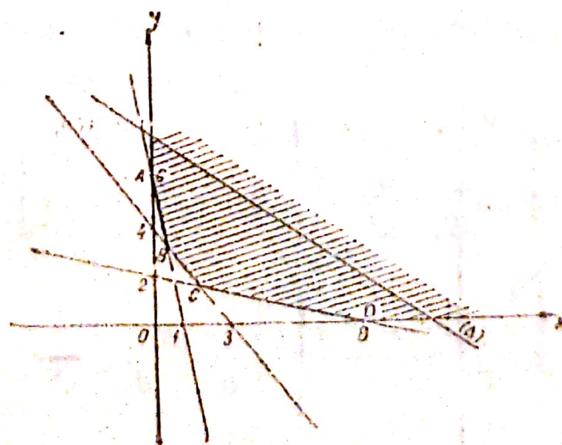


Fig. 56

giunea haşurată în două părţi astfel ca puncte din ambele părţi să satisfacă problema. Interesează dreapta din familia (Δ) pentru care f este minim, și acest lucru se realizează cînd dreapta (Δ) trece prin vîrful $C\left(\frac{24}{13}, \frac{20}{13}\right)$ (intersecţia dreptelor $4x + 3y = 12$ şi $x + 4y = 8$). Scriind că (Δ) trece prin C se obţine $f_{minim} = 2 \cdot \frac{24}{13} + 3 \cdot \frac{20}{13} = \frac{108}{13}$.

2. Se reprezintă grafic dreptele $2x + 2y = 12$, $x + y = 8$, $4x = 16$, $4y = 12$ în cadranul I ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) (figura 57). Toate punctele interioare poligonului $OABCD$ (porţiunea haşurată) satisfac condiţiile impuse.

Coordonatele oricărui punct $M(x, y)$, sînt cuprinse în „poliedrul soluţiilor". Din această infinitate de puncte, trebuie ales acela care face funcţia $f = 2x + 3y$ maximă. Se observă că ecuaţia $2x + 3y - f = 0$ (unde f este un parametru) reprezintă un fascicul de drepte paralele, cu ordonatele la origine proporţionale cu f. A determina f_{max}, revine la a determina acea dreaptă din familie care are ordonata maximă şi trece prin cel puţin un punct $M(x, y)$ din poliedrul soluţiilor. Se observă că această condiţie o satisface dreapta din fascicul care trece prin vîrful B al poliedrului. Cum punctul B este situat la intersecţia dreptelor:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x = 16 \end{cases} \Rightarrow B(4, 2). \text{ Deci } f_{max} = 14.$$

3. Nu există soluţie posibilă. **4.** $f_{min} = 0$ în $P(0, 0)$. **5.** Nu există soluţie posibilă. **6.** Nu există soluţie optimă.

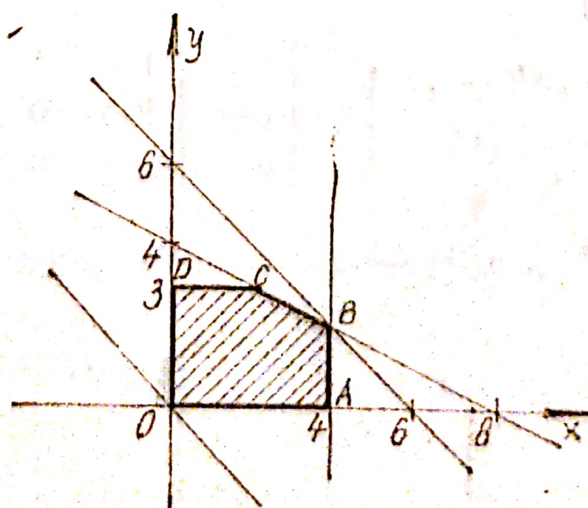


Fig. 57

TESTUL 138

1. a) Condițiile sînt aceleași ca la problema 1 din testul **137**, deci regiunea hașurată este aceeași. Fasciculul (Δ), de această dată, este format din drepte paralele cu prima bisectoare. Se observă intuitiv că nici o dreaptă din fascicul nu dă un minim pentru f. Deci funcția nu are un minim, adică programul nu are un optim. b) Se observă că toate punctele de pe segmentul BC (din figura 57) realizează minimul lui f. Deci problema admite o infinitate de soluții $f_{min} = 12$.

2. a) Pentru aplicarea algoritmului simplex trebuie adusă problema de mai sus la forma standard. Acest lucru se realizează prin introducerea variabilelor de ecart x_4, x_5 nenegative în cele două restricții:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_5 = 16. \end{cases}$$

Matricea $A = (a^1, a^2, a^3, a^4, a^5) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ are rangul 2, iar vectorii coloană

$$a^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ și } a^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ai variabilelor de ecart formează o bază. Deoarece soluția de bază corespunzătoare $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 8$, $x_5 = 16$ verifică condițiile de nenegativitate, baza a^4, a^5 este admisibilă. Vom nota cu c_i coeficienții din funcția dată corespunzători vectorilor

$$a_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adică

$$c_0 = 8, \; c_1 = 2, \; c_2 = 6, \; c_3 = 2, \; c_4 = 0, \; c_5 = 0$$

și alcătuim tabelul:

	Baza			2	6	2	0	0	Soluțiile sistemului	
			a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
	$\leftarrow a_4$	0	8	2	5	3	1	0	x_1	0
I.	a_5	0	16	4	3	8	0	1	x_2	0
	s_i	—	—	0	0	0	0	0	x_3	0
									x_4	8
	$s_i - c_i$	—	—	-2	-6	2	0	0	x_5	16
	$\rightarrow a_2$	6	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	x_1	0
	a_5	0	$\frac{56}{5}$	$\frac{14}{5}$	0	$\frac{31}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	x_2	$\frac{8}{5}$
II.	s_i	—	—	$\frac{12}{5}$	6	$\frac{18}{5}$	$\frac{6}{5}$	0	x_3	0
	$s_i - c_i$	—	—	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	0	x_4	0
									x_5	$\frac{56}{5}$

S-a notat cu s_i din *I* suma produselor elementelor din prima coloană cu componentele vectorilor a_i, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$; $(0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 4 = 0, 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0, 3 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0)$. Pentru a ști care vector intră în bază se compară diferențele $s_i - c_i$, iar cea mai mică este -6, corespunzătoare vectorului a_2, deci vectorul a_2 va intra în noua bază. Pentru a determina vectorul care iese din bază (în locul căruia va intra vectorul a_2), se vor calcula rapoartele dintre componentele vectorului a_0 și a_2 și $\frac{8}{5}$ și $\frac{16}{3}$. Se consideră cel mai mic dintre ele, care este $\frac{8}{5}$, corespunză-

tor în tabel vectorului a_4. Deci vectorul a_4 este acela care va ieşi din bază. Noua bază va fi $\{a_2, a_5\}$. În această bază vectorii, $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ se scriu:

$$a_0 = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{56}{5} \end{bmatrix} \quad a_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{14}{5} \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{31}{5} \end{bmatrix}, \quad a_4 =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}, \quad a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(vezi schimbarea coordonatelor unui vector, la o schimbare a bazei). Se calculează din nou s_i şi $s_i - c_i$ şi se trec în tabel. Soluţia în noua bază este $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{8}{5}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{56}{5}$. Astfel, în acest tabel am obţinut programul optim (degenerat), şi valoarea maximă a funcţiei obiectiv este $f_{max} = 2 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{8}{5} + 2 \cdot 0 = 9 \cdot \frac{3}{5}$ (întrucît fiind o problemă de maximizare am obţinut toţi $S_i - c_i > 0$).

b) Matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

poate avea cel mult rangul 3. Cum rangul matricei

$$M(a_1, a_4, a_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ este 3, atunci vectorii a_1, a_2, a_3 constituie o bază.

Se alcătuieşte tabelul:

Baza	c_i		0	1	—3	0	2	0	Explicarea calculelor
		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	Cum $\min (s_i - c_i) = -3$ înseamnă că vectorul a_3 intră în bază. Calculînd raportul dintre componentele vectorului a_0 şi a_3 se obţine $\frac{12}{4} = 3$ şi $\frac{10}{3} =$ $= 3{,}3$; deci vectorul a_4 iese din bază.
a_1		7	1	3	—1	0	2	0	
$\leftarrow a_4$		12	0	—2	[4]	1	0	0	
a_6		10	0	—4	3	0	8	1	
s_i	0	0	0	0	0	0	0	0	
$s_i - c_i$	—	—	0	1	—3	0	2	0	
$\leftarrow a_1$		10	1	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	$\frac{1}{4}$	2	0	Cum $\frac{10}{\frac{5}{2}} = 4$ înseamnă că a_1 iese din bază. Cum $\min (s_i - c_i) = -2$ înseamnă că în locul vectorului a_1 va intra în bază vectorul a_2
$\rightarrow a_3$		3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	
a_6		1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1	
s_i		—9	0	$\frac{3}{2}$	—3	$-\frac{3}{4}$	0	0	
$s_i - c_i$		0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	2	0	
$\rightarrow a_2$		4	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0	Nu mai există diferenţe $s_i - c_i$ negative. Valoarea minimă a funcţiei a fost atinsă pentru: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 11$, $f_{\min} = -11$.
a_3		5	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	
a_4		11	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1	
s_i		—11	$-\frac{1}{5}$	1	—3	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	
$s_i - c_i$	—	—	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	

TESTUL 139

1. $f_{min} = -15$. **2.** $f_{min} = \frac{15}{5}$. **3.** $f_{max} = 7$.

TESTUL 140

1. a) $\Delta_1 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$. b) $\Delta_2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)\cdot$ $\cdot(a-b-c+d)$. c) $\Delta_3 = \frac{(x-1)^n + (x+1)^n}{2}$. d) $\Delta_4 = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$.

TESTUL 141

Pentru exercițiile 2 și 3, revedeți testul 131 și respectiv testul 132. Verificarea corectitudinii calculelor pentru matricele inverse, se face efectuînd înmulțirile $X \cdot X^{-1}$.

TESTUL 142

1. a) Sistemele sînt de forma $AX = B$. Se înmulțește la stînga cu A^{-1}, obținîndu-se $X = A^{-1} \cdot B$. **2.** b) Ecuația este de forma $X \cdot A = B$. Se înmulțește la dreapta cu A^{-1} obținîndu-se $X = B \cdot A^{-1}$.

TESTUL 143

1. a) Admite și soluția $\left\{-\frac{11}{7}\alpha, -\frac{1}{7}\alpha, \alpha\right\}$ $\alpha \in R$. b) $\{-7\alpha + 2\beta, 6\alpha - 3\beta, \alpha, \beta\}$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$. **2.** a) Sistemul este compatibil, dublu nedeterminat; soluțiile sînt: $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = 3\alpha + \beta - 6$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$. b) Sistemul este compatibil, determinat; $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

TESTUL 144

1. Pentru $\lambda \in R \setminus \{2, 6\}$ sistemul este compatibil și unic determinat. Pentru $\lambda = 6$ sistemul este compatibil nedeterminat cu soluția $x = \frac{7 + \alpha}{3}$, $y = \frac{4 - 5\alpha}{3}$, $z = \alpha$. Pentru $\lambda = 2$ sistemul este incompatibil.

II. a) Se folosește fie lema substituției, fie schema lui Horner.

$$f = (x + 1)^3 - 7(x + 1)^2 + 10(x + 1).$$

TESTUL 145

Pentru rezolvare se recomandă studierea testelor 123, 124, 125 și 126.

TESTUL 146

2. c) Folosind formulele de transformare obținute la acest punct, se scrie vectorul x exprimat $\{f_1, f_2, f_3\}$ în baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ și se obține $x = (1, 0, 1, 0)$.

TESTUL 147

1. a) Matricea transformării este $A_{T'} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & C_n^1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & C_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

TESTUL 148

1. Vezi testul 127, exercițiul 2. **2** și **3.** Vezi testul 127, punctele b) și c).

II. TESTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

— CLASA A XI-a —

II.1. ȘIRURI DE NUMERE REALE

TESTUL 149

1. Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\in N}$ și afirmația: „numărul a este limita șirului $(a_n)_{n\in N}$, dacă orice vecinătate a punctului a conține o infinitate de termeni ai șirului". Este adevărată această afirmație?

2. Să se nege propoziția: „$(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists) N(\varepsilon) \in N$, astfel încît pentru $(\forall)\ n > N(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$".

3. Fie șirul cu termenul general $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

a) Să se verifice că acest șir are limita $\dfrac{1}{2}$.

b) Să se determine rangurile de la care începînd toți termenii șirului diferă de $\dfrac{1}{2}$ cu mai puțin de $\dfrac{1}{10}$; $\dfrac{1}{100}$; $\dfrac{1}{1000}$.

4. Fie șirul cu termenul general $a_n = \dfrac{3n-5}{9n+4}$.

a) Să se verifice că acest șir are limita $\dfrac{1}{3}$.

b) Să se determine numărul termenilor șirului, care se găsesc în afara intervalului $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1000}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{1000}\right)$.

5. Folosind definiția cu „ε" să se arate că șirul cu termenul general

$$a_n = \frac{3^n + (-3)^n}{4^n} \text{ are limita } 0.$$

6. Plecînd de la definiție să se arate că șirul cu termenul general

$$a_n = \frac{3^n + (-3)^n}{3^n} \text{ nu are limita zero.}$$

7. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in N}$, $a_n = \cos n\pi$ nu converge către 1.

8. Este convergent șirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$?

TESTUL 150

1. Folosind teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite să se studieze natura șirurilor cu termenii generali:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. b) $a_n = (\cos n\pi)n^5$.

$$a_n = \left(1 + \sin n\frac{\pi}{2}\right)\frac{n^2}{n^2+1}.$$

d) $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $a_n = \dfrac{\sqrt{1}}{2+\sqrt{1}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdots \dfrac{\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}}$.

f) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+1} \sin n\pi$.

g) $a_n = \dfrac{1}{3+1} + \dfrac{1}{3^2+1} + \dfrac{1}{3^3+1} + \ldots + \dfrac{1}{3^n+1}$.

h) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

i) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

j) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$.

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$; $\alpha \in (0, \infty)$. d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}$.

3. Folosind teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite să se specifice dacă șirurile de mai jos sînt convergente și să se determine limitele lor.

a) $a_1 = \sqrt{2}$; $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$; ...;

... $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}$, ... ,

b) $a_1 = 1$; $a_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; $n > 1$,

c) $a_1 = \frac{5}{4}$; $a_2 = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}$; ... $a_n = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}$ ...

... $\frac{5 + 2(n-1)}{4 + 3(n-1)}$; ... ,

TESTUL 151

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dacă:

1. $a_n = \frac{3n^2 + 5n - 4}{n^2 + 1}$. **2.** $a_n = \frac{n^3 + 13n + 5000}{1 - n^3}$.

3. $a_n = \frac{n + 1}{3n^2 + 2}$. **4.** $a_n = \frac{2n^2 + 7n + 8}{4n^2 + 1}$.

5. $a_n = \dfrac{-2n^5 + 3n^4 - 1}{3n^2 + 2}$.

6. $a_n = \sqrt{3n^2 + n + 2} - \sqrt{3n^2 - 2n - 1}$.

7. $a_n = n\left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right)$.

8. $a_n = \sqrt[3]{(n + 1)^2} - \sqrt[3]{(n - 1)^2}$.

9. $a_n = \dfrac{\sqrt{n + 1}}{\sqrt{n + 2} + \sqrt{n + 1}}$.

10. $a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} - n$.

11. $a_n = \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2}$.

12. $a_n = \dfrac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1)}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$.

13. $a_n = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1)(n + 2)}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}$.

TESTUL 152

Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ pentru:

1. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k + 1)}$.

2. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k - 1)(2k + 1)}$.

3. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k + 1)(k + 4)}$.

4. $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

5. $a = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

6. $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2 + 2k}{k^2 + 2k + 1}$.

7. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}$.

8. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)! + k!}$.

9. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2 - 3k - 2}$.

10. $a_n = \sum_{k=0}^{n} \log_{u_k} N$; $u_k = a^{b^k}$, $a \in R_+$, $b \in R_+$, $N \in R_+$.

(I.P., București).

TESTUL 153

1. Fie șirul de numere reale: $a_n = \left(3 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{(-1)^n}{n}}$;

a) Să se decidă dacă șirul dat este convergent.
b) Dacă șirul este convergent să i se calculeze limita.

(Facultatea de Matematică — Mecanică, București, 1972)

2. Se consideră șirul cu termenul general

$$a_n = \frac{(n+3)^2 + 3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \text{ și se cere:}$$

a) să se arate că termenul general al șirului se poate scrie astfel: $a_n = f(n) - f(n+1)$ unde f are forma

$$f(n) = \frac{nA + B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}, \quad A \text{ și } B \text{ fiind constante;}$$

să se determine aceste constante;

b) să se arate că șirul cu termenul general $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ este convergent, și să se calculeze $\lim_{n \to \infty} b_n$.

c) să se calculeze limita şirului $c_n = b_n^{n \cdot 2^n}$.

(I.P., Bucureşti, 1970)

3. Să se arate că şirul $(u_n)_{n \in N}$ unde $u_n = \frac{f(n+1)}{f(n)}$ cu $f(n) = (n!)^{\frac{1}{n}}$ este monoton descrescător.

TESTUL 154

1. Fie şirul $(a_n)_{n \in N}$ definit astfel:

$$a_0 = 2; \quad a_{n-1} - a_n = \frac{n}{(n+1)!}.$$

Se cere:

a) să se găsească expresia termenului general a_n.
b) să se arate că şirul $(a_n)_{n \in N}$ este convergent.
c) să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} (n+1)! \ln a_n$.

(G.M.B., 5, 1971)

2. Fie şirul cu termenul general $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Să se arate că este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

3. Dacă şirul $(a_n)_{n \in N}$ este definit astfel:

$$a_1 = \frac{\alpha}{2}, \; a_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{a_1^2}{2}, \; \ldots, \; a_n = \frac{\alpha}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}, \; \ldots \text{ cu } \alpha \in (0, 1),$$

se cere să se arate că este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

4. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ un şir de numere pozitive în progresie geometrică crescătoare şi p un număr natural. Se cere:

a) să se arate că raportul sumelor:

$$S'_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p} \text{ şi}$$

$$S_n = \frac{1}{a_2^p - a_1^p} + \frac{1}{a_3^p - a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p} \text{ nu depinde de } n.$$

b) să se determine rația progresiei date astfel ca:

$$\frac{a_n}{a_{n-2}+a_{n+2}}=\frac{4}{17}.$$

c) să se calculeze $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{S_n}{S'_n}\right)^p$.

(I.P., București, 1970)

TESTUL 155

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că a_1, a_2, a_3 sînt în progresie geometrică, a_2, a_3, a_4 sînt în progresie aritmetică, a_3, a_4, a_5 sînt în progresie geometrică, ș.a.m.d. Să se găsească termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă se cunosc termenii a_1 și a_2.

(Concurs elevi, 1976)

2. Dacă șirul $(a_n)_{n\in N}$ are proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+a_{n-1}}{n}=0$.

3. Să se arate că șirurile cu termenii generali

$$a_n=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{k^2+3k+2}\quad\text{și}\quad b_n=\prod_{i=1}^{n}a_i$$

sînt convergente și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

(Concurs elevi)

4. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}$.

TESTUL 156

1. Fie șirul $(a_n)_{n\in N}$ un șir de numere reale care are limita a și $(b_n)_{n\in N}$ un șir definit prin relația $b_n=b+(-1)^n\sin a_n$ oricare ar fi $n\geq 1$ și b un număr real fixat. Care sînt valorile lui a pentru care șirul $(b_n)_{n\in N}$ este convergent și în acest caz să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

(Facultatea de Matematică, București, 1977).

2. Fie șirul $(a_n)_{n\in N}$ definit astfel:

$$a_0 = a_1 = 0 \text{ și } a_{n+1} = \frac{1}{3}(b + a_n + a_{n-1}^2),\ n \geqslant 1,\ b \in [0,\ 1].$$

Să se arate că șirul a_n este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

3. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in N}$ definit astfel:

$$a_1 = 10,\ a_{n+1} = \frac{2 + a_n^2}{2a_n},\ n \geqslant 2,$$

este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. Să se calculeze limita șirului definit astfel:

$$x_1 = \sqrt{1-a},\ x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n},\ a \in (0,\ 1).$$

5. Să se determine $\alpha \in R$, astfel ca șirul $(a_n)_{n\in N}$ definit astfel: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \alpha a_{n-1} + a_n$, să aibă limita zero.

TESTUL 157

1. Folosind lema lui *O. Stolz* să se arate că:

a) dacă $a_n > 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b) dacă șirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$; $p \in N$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{(n+1)}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!2^n}}$.

TESTUL 158

1. Fie seriile:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$

(seria armonică).

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \dfrac{1}{2^{\alpha}} + \dfrac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \dfrac{1}{n^{\alpha}} + \ldots$

(seria armonică generalizată).

Utilizînd definiţia, să se arate că seria a) este divergentă, iar seria b) este convergentă pentru $\alpha > 1$.

2. Se ştie că o condiţie necesară pentru ca seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ să fie convergentă este ca: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

a) Este această condiţie şi suficientă?

b) Să se dea un exemplu de serie al cărei termen general tinde către zero, dar seria este divergentă.

c) Dacă termenul general al unei serii (u_n) nu tinde către zero, ce se poate spune despre natura seriei?

3. Fie seria numerică $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, ai cărei termeni sînt pozitivi. Să se demonstreze că dacă şirul sumelor parţiale al acestei serii este mărginit atunci seria este convergentă.

TESTUL 159

1. Fie seria convergentă $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Ce se poate spune despre natura acestei serii dacă:

a) la această serie se adaugă un număr finit de termeni;
b) din această serie se exclud un număr finit de termeni;
c) dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni.

2. Să se calculeze suma următoarelor serii:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)! + k!}$.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

TESTUL 160

Folosind proprietatea: „O serie numerică cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor sale parțiale este mărginit", să se studieze natura seriilor:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2n+1}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n+1}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} [n^4 + 2n + 1 - n^2]$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^2 \frac{n\pi}{4}}{2^n}$.

II. 2. LIMITE DE FUNCȚII DEFINITE PE MULȚIMI DIN R

TESTUL 161

1. Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct, să se arate că limitele de mai jos nu există:

a) $\lim_{x\to1} \sin \frac{1}{x-1}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \sin x$.

c) $\lim_{x\to\infty} \cos x$.   d) $\lim_{x\to 0} a^{\frac{1}{x}}$; $a \in R_{+}$, $a \neq 1$.

2. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.   b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.   d) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

e) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-3x}-x)$.   f) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+5x+1}}{2x+1}$.   h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{3x^2+5x+1}}{2x+1}$.

TESTUL 162

Să se calculeze limitele:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.   **2.** $\lim_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

3. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.   **4.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{1-5x}$.

5. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.   **6.** $\lim_{x\to -1} \cos \frac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}$.

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$.   **8.** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

9. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.   **10.** $\lim_{x\to -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

11. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}\right)$.

TESTUL 163

Să se calculeze:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+7}{2x^2+9}\right)^{2x^2}$. 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$. 6. $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

7. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^3+x^2-1}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x}}{x}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

11. $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{x^3-3ex+2e^3}}$.

TESTUL 164

1. Pentru $\alpha\in R$, să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}-2\alpha x\right).$$

2. Să se calculeze limitele laterale:

a) $\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{x}{x-1}$. b) $\lim\limits_{x\searrow 2}\frac{2x}{x^2-4}$.

c) $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$. d) $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$.

e) $\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{4}}e^{\frac{1}{\operatorname{tg}x-1}}$. f) $\lim\limits_{x\nearrow 0}e^{\frac{1}{x}}$.

g) $\lim\limits_{x \searrow 0} e^{\frac{1}{x}}$. h) $\lim\limits_{x \searrow 1} \frac{x-2}{x^2-5x+4}$.

3. Să se stabilească dacă următoarele funcţii au limită în punctele specificate:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4(x-1)}{5(x-1)} & \text{dacă } x \in \left[+\frac{1}{2}, 1\right) \\ \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 3(x-1)}{\sin(x-1)} + \dfrac{1}{5} & \text{dacă } x \in (1, 2]; \end{cases}$$

în punctul $x = 1$.

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-3}}} & \text{dacă } x \in [0, 3) \\ \dfrac{\sin(x-3)}{2x-6} & \text{dacă } x \in (3, 4) \end{cases}; \text{ în punctul } x = 3.$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^3}{1+x^3}} & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \\ 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}; \text{ punctul } x = 0.$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4 \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \\ \dfrac{\sin 2(x^2-1)\pi}{x^2-1} & \text{dacă } x \in (-1, 1) \end{cases}; x = -1.$$

II.3. FUNCŢII CONTINUE

TESTUL 165

Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pentru } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right) \\ \sin 2x & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \operatorname{ctg} x & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| e^{-\frac{1}{|x+1|}} & \text{pentru } x \in [-2, -1) \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = -1 \\ e^{\frac{1}{\sin(x+1)}} & \text{pentru } x \in [-1, 0]. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(x-1)}{x^2 - x} & \text{pentru } x \in (-\infty, 0) \\ 4x^3 - 3x^2 + x & \text{pentru } x \in [0, +\infty). \end{cases}$

d) $f(x) = [x]$ (funcția „partea întreagă a lui x", (vezi testul 13).

e) $f(x) = \{x\}$ (funcția „partea fracționară a lui x").

f) $f(x) = \text{sign } x$.

g) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in Q \\ 0 \text{ dacă } x \in R \setminus Q. \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \in Q \\ -x \text{ dacă } x \in R \setminus Q. \end{cases}$

TESTUL 166

1. Să se arate că funcția lui *Riemann*:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ dacă } x \text{ este rațional} \left(x = \frac{p}{q}; p, q \in Z; p \neq 0; q \neq 0\right) \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional sau } x = 0 \end{cases}$$

este discontinuă în orice punct rațional și este continuă în orice punct irațional.

2. Să se arate că funcția

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0, 1] \text{ este rațional} \\ 1 - x & \text{dacă } x \in (0, 1) \text{ este irațional,} \end{cases}$$

este discontinuă pentru $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ și este continuă în punctul $x = \frac{1}{2}$.

3. Fie funcţia $f : R \to R$; $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)\ (\forall)\ x \in R$ şi $n \in N$. Să se arate că $f(x)$ este o constantă pe R, dacă este continuă.

4. Să se arate că soluţiile continue ale ecuaţiei funcţionale $f(x + y) = f(x) + f(y)$ au proprietăţile:

a) $f(0) = 0$; b) $f(px) = pf(x)$, $p \in Q$; c) $f\left(\frac{x + y}{n}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{n}$, $n \in N$. d). Singurele soluţii continue sînt de forma $f(x) = \alpha x$, $\alpha \in R$.

5. Fie f o soluţie a ecuaţiei funcţionale $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Să se arate că dacă este continuă în punctul x_0 atunci este continuă pe R.

TESTUL 167

1. Să se determine parametrul real $\alpha \in R$, astfel încît funcţiile de mai jos să fie continue pe domeniul lor de definiţie:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + \sin x^3}}{x} & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \\ 1 & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{\sin \alpha x}{5x} & \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} & \text{dacă } x \in R \setminus \{0\} \\ \alpha & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \alpha(x - 1)}{x - 3} & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ \dfrac{5x}{6} - \alpha & \text{dacă } x \in [1, 6]. \end{cases}$$

2. Fie două funcții $f:[a, b] \to [a, b]$ și $g:[a, b] \to [a, b]$. Să se arate că dacă aceste funcții sînt continue și una din ele este surjectivă, atunci există un punct $x_0 \in [a, b]$ astfel încît $f(x_0) = g(x_0)$.

3. Fie $f: R \to R$, continuă și diferită de zero. Să se arate că dacă satisface relația $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall)\ x \in R$, $y \in R$, atunci este o funcție exponențială.

4. Fie funcția $f:(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dacă această funcție este continuă și dacă $f(x + y) + f(x - y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ pentru orice x și $y \in R \setminus \{0\}$, să se arate că funcția f este o constantă.

5. Fie funcția

$$f(x) = (1 + x)^2 \operatorname{sign} x.$$ Să se arate că:

a) funcția este bijectivă;
b) funcția este continuă pentru $x \in R \setminus \{0\}$;
c) funcția inversă este continuă pentru $x \in R$.

(A.S.E., București)

TESTUL 168

1. Fie funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{5x} & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ \dfrac{4}{5} & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{\sin(x^2 + 2x)}{5(x^2 + 2x)} + \dfrac{3}{5} & \text{dacă } x \in (0, 1). \end{cases}$$

a) Este această funcție mărginită pe domeniul său de definiție?

b) Își atinge marginile pe intervalul $[-1, 1]$?

2. Fie funcția $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{pentru } x \in [-1, 1) \\ 2x^2 - \alpha & \text{pentru } x \in [1, 2) \\ \beta x^3 - 1 & \text{pentru } x \in [2, 3]. \end{cases}$

a) Să se determine α și β astfel încît funcția să fie continuă.

Să se dea argumente din care să rezulte că funcția determinată la punctul a) are proprietățile:

b) este mărginită;

c) își atinge marginile;

d) este uniform continuă;

e) ia orice valoare cuprinsă între 0 și 26.

3. Să se arate că mulțimea valorilor funcției continue $f(x) = 1 + \sin x$, $x \in (0, 2\pi)$ este un segment.

4. Dacă f este o funcție continuă pe $[a, b]$ și $x_1, x_2 ... x_n$; sînt valori din acest interval, să se arate că există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel ca:

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}.$$

5. Folosind proprietatea lui *Darboux* pentru funcții continue, să se arate că funcția $f : R \to R$, $f(x) = xe^{2x} - e$ se anulează cel puțin o dată în intervalul $(0, 1)$.

II. 4. FUNCȚII DERIVABILE

TESTUL 169

1. Să se determine punctele situate pe curba de ecuație $y = x^3 - 6x + 1$, în care tangentele să fie:

a) paralele cu axa Ox.

b) paralele cu dreapta $y = 6x$.

c) perpendiculare pe dreapta $y = -\frac{x}{21}$.

2. Legea de mișcare a unui corp cu masa de 5 g este $S = t^2 + 5t - 6$ (S este spațiul exprimat în cm, iar t este timpul exprimat în secunde).

a) Să se determine viteza corpului în secunda a treia de la start.

b) Să se calculeze energia cinetică a corpului în aceeași secundă.

3. Pornind de la definiție să se calculeze derivatele funcțiilor:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$. b) $f(x) = 5x^2 - 2x$. c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

TESTUL 170

Să se calculeze derivatele funcțiilor:

1. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{3x^2-5}{x-2}}$.
2. $f(x) = \sqrt{\frac{\cos 3x + \sin 2x}{\sin x}}$.
3. $f(x) = (\sqrt[4]{\operatorname{tg} x})^x$.
4. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.
5. $f(x) = \arcsin\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.
6. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.
7. $f(x) = \operatorname{tg}^5(\operatorname{tg} x^2)$.
8. $f(x) = \cos^4[\sin(3x^2+2x)]$.

TESTUL 171

1. Să se studieze derivabilitatea funcțiilor:

a) $f(x) = |x^2-1|$. b) $f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \cos x \text{ pentru } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

2. Să se determine $\alpha \in R$ și $\beta \in R$ astfel încît funcția:

$$f(x) = \begin{cases} 2\frac{\sin x + \cos x^2}{\cos x} & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ \alpha x + \beta & \text{dacă } x \in (-\infty\ 0), \end{cases}$$

să fie derivabilă în origine.

3. Fie funcția $f(x) = a \ln(x^4 - 3x^2 + 2) + x^2 + bx$. Să se determine parametrii reali a și b astfel ca în origine funcția să admită un maxim egal cu ln 14.

4. Să se precizeze, care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate și care sînt false:

a) derivata unei funcții într-un punct este un număr.
b) derivata unei funcții pe un interval este un număr.
c) orice funcție continuă este derivabilă.
d) orice funcție derivabilă este continuă.

5. Fie funcția $f: E \to R$ și $x_0 \in E$. Ținînd seama de interpretarea geometrică a derivatei să se precizeze natura punctului x_0 de pe graficul funcției cînd:

a) $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$, $f'_s(x_0)$ și $f'_d(x_0)$ sînt finite.

b) $f'_s(x_0) = +\infty$ și $f'_d(x_0) = -\infty$ sau $f'_s(x_0) = -\infty$ și $f'_d(x_0) = +\infty$.

c) $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ unde o derivată laterală este finită și cealaltă este infinită.

TESTUL 172

Să se calculeze derivatele de ordinul n ale următoarelor funcții:

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \sin x$.
3. $f(x) = \cos^2 x$
4. $f(x) = (1 + x)^\alpha$; $(\alpha \in R)$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
6. $f(x) = \ln(1 + x)$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

TESTUL 173

Utilizînd regula lui *l'Hospital* să se calculeze limitele:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$; $(x > 0)$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} (x)^{\operatorname{tg} x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\sin x}\right]$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty} [x - x^2 \ln(1 + x)]$.

II.5. PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR DERIVABILE PE UN INTERVAL

TESTUL 174

1. Să se studieze valabilitatea teoremei lui *Fermat* pentru funcțiile:

a) $f(x) = 3x + 1$ dacă $x \in [0, 2]$. b) $f(x) = |x^2 - 1|$.

2. Pentru fiecare din funcțiile de mai jos, să se cerceteze dacă există cel puțin un punct $\xi \in (-1, 1)$ astfel încît tangenta la grafic (în acest punct) să fie paralelă cu axa Ox.

a) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$; $x \in [-1, 1]$.

b) $f(x) = e^{|x|}$; $x \in [-1, 1]$.

c) $f(x) = e^{x^2}$; $x \in [-1, 1]$.

d) $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x) \text{ dacă } x \in [0, 1] \\ \ln(1 - x) \text{ dacă } x \in [-1, 0). \end{cases}$

3. Să se precizeze intervalele în care sînt situate rădăcinile derivatei funcției: $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4)(x - 8)$ și să se generalizeze acest rezultat.

TESTUL 175

1. Se consideră ecuația: $na_0x^{n-1} + (n - 1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} = 0$ unde $a_i \in R$, $n \in N$, $n \geq 2$.

a) Să se arate că ecuația are cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(0, 1)$ dacă $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0$.

b) Să se găsească relația dintre coeficienții: a_i, $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$, astfel încît ecuația să aibă cel puțin o rădăcină în intervalul $(-1, 0)$.

2. Fie funcția $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n \text{ dacă } x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4 \text{ dacă } x \in (0, 1]. \end{cases}$

Să se determine $m \in R$, $n \in R$, $p \in R$ astfel încît funcția dată să satisfacă condițiile teoremei lui *Rolle*.

3. Fiind dată funcția $f(x) = x - x^3$, $x \in [-2, 1]$ să se arate că există un punct în care tangenta la graficul funcției,

este paralelă cu coarda care unește punctele $A(-2, 6)$ și $B(1, 0)$, iar apoi să se determine coordonatele acelui punct.

4. Fie funcția $F(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$ unde $f(x)$ este o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b).

a) Se poate aplica teorema lui *Rolle* funcției $F(x)$, pe intervalul $[a, b]$?

b) În caz afirmativ să se aplice.

TESTUL 176

1. Să se arate că punctul „ξ" din teorema lui *Lagrange* aplicată funcției $f(x) = \ln x$, $x \in R_+$, în intervalul $[a, b] : 0 < a < b$ satisface condiția: $\sqrt{ab} < \xi < \dfrac{a+b}{2}$

(G.M.B., 1976)

2. Utilizînd formula creșterilor finite să se arate că:

a) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ dacă $x \in (0, +\infty)$.

b) $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} < \dfrac{1}{2}[\ln^2(1+x) - \ln^2 x] < \dfrac{\ln x}{x}$. (pt. x > e)

c) $e^{\lambda x} > 1 + \left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2$; $(\forall)x > 0$ și $\lambda > 1$.

d) $\dfrac{b-a}{\sin^2 b} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \dfrac{b-a}{\sin^2 a}$; $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$.

TESTUL 177

Reamintim cîteva consecințe ale teoremei lui *Lagrange*.

c_1: „Dacă funcția f are derivata nulă pe un interval I, atunci este constantă pe acest interval".

c_2: „Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe un interval I și dacă derivatele lor sînt egale pe I, diferența lor este constantă (pe I).

c_3: „Dacă derivata unei funcții este strict pozitivă (negativă) pe un interval I, atunci funcția este strict crescătoare (descrescătoare) pe I.

1. Folosind consecința c_1, să se deducă următoarele formule cunoscute din trigonometrie:

a) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

b) $\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$ dacă $x \in [0, +\infty)$.

c) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; $x \in [-1; 1]$.

2. Utilizînd consecința c_2 să se arate că funcțiile:

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} \text{ și } g(x) = 2 \operatorname{arctg} x; \quad x \in [-1, 1]$$

diferă printr-o constantă. Să se determine această constantă.

3. Folosind consecința c_3 să se studieze monotonia funcțiilor de mai jos și apoi să se precizeze eventualele puncte de extrem:

a) $f(x) = \frac{3}{4} x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$; $\quad x \in R$.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2}$; $\quad x \in R$.

c) $f(x) = x^4 \cdot e^{-x^2}$; $\quad x \in R$.

d) $f(x) = \sin x \sin 2x$; $\quad x \in R$.

TESTUL 178

1. Fie funcțiile: $f(x) = \ln(1 + x)^{1+x}$ și $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Se cere:

a) Să se verifice că îndeplinesc condițiile teoremei lui *Cauchy* pe intervalul $[0, x]$, unde x este un număr real pozitiv.

b) Să se arate că $\ln(1 + x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x}$.

2. Să se aplice formula lui *Cauchy* funcțiilor $f(x) = \ln x$ și $g(x) = \frac{e}{x}$ pe intervalul $[1, e]$.

3. Dacă funcția $h: I \to R$ este de trei ori derivabilă pe I, iar a și $b (a < b)$ sînt două puncte interioare lui I, se cere să aplice formula lui *Cauchy* funcțiilor:

$$f(x) = h(x) + \frac{b-x}{1!} h'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} h''(x) \quad \text{și} \quad g = (b-x)^3$$

pe intervalul $[a, b]$. Să se generalizeze rezultatul obținut.

TESTUL 179

Folosind diferențiala unei funcții să se calculeze cu aproximație:

1. arctg 1,1. **2.** $\sqrt[3]{123}$.

3. $\sqrt[5]{33}$. **4.** cos 31°.

5. sin 18°. **6.** $\sqrt[3]{30}$.

II.6. STUDIUL VARIAȚIEI FUNCȚIILOR

TESTUL 180

Să se stabilească domeniile de definiție ale funcțiilor:

1. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$.

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$.

3. $f(x) = \frac{\ln |x| - 1}{\ln |x| + 1} e^{\frac{1}{x}}$.

4. $f(x) = \frac{1}{\lg(1 + x)} + \sqrt{x - 2}$.

5. $f(x) = \sqrt{\arccos(\lg x)}$.

6. $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_{\frac{1}{2}} x)}$.

7. $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + x} + \arccos\sqrt{x^2 + x + 1}$.

8. $f(x) = \log_x (4 - x^2)$.

TESTUL 181

Să se determine asimptotele graficelor următoarelor funcţii:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. 2. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-1}$.

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. 4. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

5. $f(x) = \sqrt{1+x^2}\sin\dfrac{1}{x}$. 6. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

7. $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)}$. 8. $f(x) = |x|e^{\frac{1}{x-2}}$.

9. $f(x) = xe^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}}$.

10. $f(x) = \dfrac{3x}{2}\ln\left(e - \dfrac{1}{3x}\right)$.

11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}$. 12. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+4}$.

TESTUL 182

Să se determine intervalele pe care graficele următoarelor funcţii sînt concave sau convexe şi să se determine eventualele puncte de inflexiune.

1. $f(x) = \dfrac{x^2(4+3x)}{(x+1)^2}$; $x \in R\setminus\{-1\}$.

2. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;\quad x \in R.$

3. $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)};\quad x \in R.$

4. $f(x) = |x-1|e^{-|x|};\quad x \in R.$

TESTUL 183

Pentru fiecare din funcțiile:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}.$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}.$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}.$

4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}.$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}.$

6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2},$

se cere:

a) să se determine domeniul de definiție.

b) să se găsească punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate.

c) să se calculeze $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

d) să se studieze monotonia și să se găsească eventualele puncte de extrem.

e) să se studieze concavitatea (convexitatea) și să se determine eventualele puncte de inflexiune.

f) să se găsească asimptotele graficului.

g) să se întocmească tabloul de variație.

h) să se reprezinte grafic.

TESTUL 184

Să se reprezinte grafic funcțiile:

1. $f(x) = \pm\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}.$

2. $f(x) = \pm\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

3. $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-(x-2)^2}.$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+3}.$

TESTUL 185

Să se reprezinte grafic funcțiile:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} e^x$. **2.** $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x}$.

3. $f(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 1)e^x}$.

4. $f(x) = e^x + \frac{3}{e^x} - 4$.

TESTUL 186

Să se reprezinte grafic funcțiile:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x(x - 1)^2}$. **2.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$.

3. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$. **4.** $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{1 + x^2}}$.

TESTUL 187

Să se reprezinte grafic funcțiile:

1. $f(x) = \left|\frac{x + 1}{x - 1}\right|$. **2.** $f(x) = |x + 1| e^{-|x|}$.

3. $f(x) = \frac{|2x^2 - 3x - 2| - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$.

TESTUL 188

Să se reprezinte grafic funcțiile:

1. $f(x) = \ln(1 + \cos 2x)$. **2.** $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

3. $f(x) = e^{\sin x}$. **4.** $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \text{arc tg} |x|$.

TESTUL 189

1. Fie funcția $f(x) = \frac{ax^3 + bx + c}{x^2 + dx + e}$; $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, $d \in R$, $e \in R$.

a) Să se determine a, b, c, d, e astfel ca: asimptota oblică la graficul funcției să aibă panta $m = 2$; asimptotele verticale să fie dreptele $x = 2$ și $x = -2$, iar în punctul de abscisă $2\sqrt{3}$ funcția să admită un minim egal cu $6\sqrt{3}$.

b) Cu a, b, c, d, e determinați la punctul anterior să se reprezinte grafic funcția $f(x)$, utilizîndu-se și derivata a II-a.

2. Fie funcția $f(x) = \frac{x^2 + 2(a - b)x + b^2 - ab + 1}{x^2 + 1 - b^2}$; $a \in R$, $b \in R$.

a) Dacă y_1 și y_2 sînt valoarea minimă și respectiv maximă a funcției, să se determine relația dintre a și b pentru ca $y_1 + y_2 = 0$.

b) În condițiile punctului b) să se determine valorile lui a și b, astfel încît tangenta la graficul funcției în punctul de abscisă 0, să fie paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

c) Pentru $a = 2$ și $b = 3$ să se reprezinte grafic funcția $f(x)$.

(Institutul de Petrol, București, 1969)

3. Fie funcția $f(x) = \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - x - 2}}$; $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$.

a) Să se determine $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$ știind că: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ și funcția admite în punctul de abscisă 1, un minim egal cu 1.

b) Cu parametrii determinați mai sus să se reprezinte grafic funcția $g(x) = \pm f(x)$.

TESTUL 190

1. Fie funcția $f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 - 5x + c}$, $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$.

a) Să se determine a, b, c știind că graficul funcției admite asimptotă oblică dreaptă $y = x - \frac{1}{3}$ și intersectează axa Oy în punctul de ordonată $\sqrt[3]{-3}$.

b) Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$, pentru $a = 1$, $b = -1$, $c = -3$.

2. a) Să se determine parametrul $m \in R$, astfel ca funcția $f(x) = \ln[2mx^2 + 2(2m-1)x + 2m]$ să fie definită pe R.

b) Să se rezolve ecuația $f\left(x, \frac{1}{2}\right) + \ln\frac{x}{2} - e^{\ln x} + x = 0$.

c) Pentru $m = \frac{1}{2}$ să se reprezinte grafic funcția.

3. Să se reprezinte grafic funcțiile: $f_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$ și $f_2(x) = e^{-x^2}$.

TESTUL 191

1. Fie funcția $f(x) = |x|\, e^{\frac{1}{x-2}}$.

a) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției.

b) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția.

c) Folosind graficul să se determine numărul rădăcinilor ecuației $f(x) = \lambda$, $\lambda \in R$.

(I.P.B., 1972)

2. Folosind metoda grafică să se stabilească numărul rădăcinilor real al ecuației $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lambda$, $\lambda \in R$.

TESTUL 192

1. Să se determine extremele locale și absolute ale funcțiilor:

a) $f(x) = e^{\cos^2 x} \cdot \sin x$; $x \in [0, 2\pi]$.

b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $x \in [-2, 2]$.

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln x$; $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$.

d) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$; $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

e) $f(x) = 3x^3 + 4{,}5x^2 - 4x + 1$; $x \in R$.

2. Dintr-o placă de tablă circulară de rază R să se scoată un sector astfel ca din porţiunea rămasă să se poată confecţiona o pîlnie de capacitate maximă.

3. Fie M un punct oarecare pe semicercul de diametru $AB = 2R$.

Din acest punct se duce perpendiculara MC pe AB şi perpendiculara MD pe tangenta dusă în punctul B la cerc.

a) Să se exprime în funcţie de raza R şi distanţa $AC=x$, volumul V al corpului obţinut prin rotirea trapezului $ANDB$ în jurul diametrului AB.

b) Pentru $R = 1$ să se determine AC astfel ca volumul să fie maxim.

(I.R., Braşov, 1969, enunţ modificat).

TESTUL 193

I. Folosind şirul lui *Rolle* să se discute după parametrul $\alpha \in R$, numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiilor:

1. $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha = 0$; $x \in R$.
2. $2\alpha x^3 + x^2 - 4\alpha = 0$; $x \in R$.
3. $x(x^2 - 3) - \alpha(x^2 + 1) - 2 = 0$.
4. $(x^2 - 1)^2 - 2x^2(1 + \lambda^2) + \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$.

II. Folosind metoda grafică, să se discute în funcţie de parametrul real λ natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$x\sqrt{x-2} - \lambda\sqrt{x-8} = 0.$$

II. 7. PRIMITIVE

TESTUL 194

Să se studieze dacă următoarele funcții posedă primitive pe domeniile specificate:

1. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in R$;
2. $f(x) = [x]$, $x \in R$;
3. $f(x) = x - [x]$, $x \in R$;
4. $f(x) = \eta(x)$, $x \in R$;
5. $f(x) = \eta(x^2 - 3x + 2) - \operatorname{sgn}(3 - x)$, $x \in R$;

6. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{dacă } x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ 1 & \text{dacă } x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right); \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x} & \text{dacă } x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \\ 1 & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{tg} x + x}{x} & \text{dacă } x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right); \end{cases}$$

9. $f(x) = \arccos \dfrac{|x|}{1 + |x|}$, $x \in R$;

10. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ x^2 & \text{dacă } x \in [0, 2] \\ 3x - 2 & \text{dacă } x \in (2, \infty). \end{cases}$

TESTUL 195

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = 2x + 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} + 23\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[5]{x},\ x \in (0, \infty)$

2. $f(x) = \dfrac{5x + 7\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x^2} + 17\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}},\ x \in (0, \infty)$;

3. $f(x) = x^3 + 3x + \sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x} + 3^x, \quad x \in (-\infty, 0)$;

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} + \dfrac{1}{x^2 - 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}},$
$x \in (2, \infty)$;

5. $f(x) = \dfrac{1}{9 - 4x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{9 - 4x^2}}, \quad x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

6. $f(x) = \cos 2x(1 + \mathrm{tg}^2 x), \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

7. $f(x) = \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{ctg}^2 x, \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

8. $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3), \ x \in R$.

TESTUL 196

Folosind formula de integrare prin părți să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)\ \ln x, \qquad x \in (0, \infty)$;

2. $f(x) = \dfrac{x + 1}{e^x}, \qquad x \in R$;

3. $f(x) = 2^x \cdot (x+1)$, $x \in R$;

4. $f(x) = 2^x \cdot \sin x$, $x \in R$;

5. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$;

6. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{e^x}}$; $x \in R$;

7. $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$, $x \in R$;

8. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in (-2, 2)$.

TESTUL 197

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = x(x^2 - 1)^{10}$, $x \in R$;

2. $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x - 5}$; $x \in (2, \infty)$;

3. $f(x) = (4x + 2)\, e^{x^2+x-1}$, $x \in R$;

4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^4}}$; $x \in (-2, 2)$;

5. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 1}}$; $x \in (1, \infty)$;

6. $f(x) = \frac{2^x}{1 + 4^x}$; $x \in R$;

7. $f(x) = \frac{1 + \ln^4 x}{x}$; $x \in (0, \infty)$;

8. $f(x) = x \sin (2 + 3x^2)$, $x \in R$;

9. $f(x) = \sin^{10} x \cos^3 x$; $x \in R$;

10. $f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (0, 1)$.

TESTUL 198

I. Să se calculeze următoarele primitive:

1) $\int x\sqrt[3]{x+1}\,dx$; $x \in R$. 2) $\int \frac{\ln^2 x + 1}{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$; $x\in(0,\infty)$.

3) $\int \frac{\cos x}{\sin^n x}dx$, $n > 1$; $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4) $\int e^x\sqrt{5e^x + 4}\,dx$; $x \in R$.

5) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$; $x \in R$. 6) $\int \frac{dx}{1+e^x}$; $x \in R$.

Se știe că pentru calculul primitivelor funcțiilor de forma:

1. $R(x\sqrt{a^2 - x^2})$. 2. $R(x\sqrt{a^2 + x^2})$.

3. $R(x\sqrt{x^2 - a^2})$, unde R este o funcție rațională; se pot face substituțiile următoare:

Pentru 1) $x = a\sin t$ sau $x = a\cos t$; pentru 2) $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ sau $x = a\cdot\mathrm{ctg}\,t$; pentru 3) $x = \frac{a}{\sin t}$ sau $x = \frac{a}{\cos t}$.

II. Să se calculeze:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$; $x \in \left(-\frac{a}{b}; \frac{a}{b}\right) b \neq 0$

2) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}dx$; $x\in(0, a)$.

3) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}\,dx}{x^3}$; $x\in(2, \infty)$. 4) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$, $x\in R$.

TESTUL 199

Utilizînd integrarea prin părți să se deducă formulele de recurență pentru integralele de mai jos (formule de reducere).

1. $I_n = \int x^2\cos\,\alpha x\,dx$ și $J_n = \int x^n \sin\,\alpha x\,dx$.

2. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ și să se calculeze I_1; I_2 și I_3.

Pavel N

3. $I_{n,-m}=\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx;\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right).$

4. $I_n=\int(\arccos x)^n\,dx$ și $J_n=\int(\arcsin x)^n\,dx.$

TESTUL 200

I. Folosind integrarea prin părți să calculeze pe $(0,\infty)$:

1) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$ 2) $\int x^3\ln x\,dx.$

3) $\int e^{\alpha x}\cos bx\,dx.$ 4) $\int e^{\alpha x}\sin bx\,dx.$

Primitivele funcțiilor $f(x)=e^{\alpha x}P(x)$, unde $P(x)$ este un polinom de gradul n, se pot calcula și astfel:

Se caută primitiva de forma $Q(x)\cdot e^{\alpha x}$, unde $Q(x)$ este un polinom cu coeficienții nedeterminați de același grad cu $P(x)$. Adică

(1) $\int e^{x\alpha}P(x)dx=e^{\alpha x}Q(x)+k.$ Derivînd relația (1) se obține $e^{\alpha x}\cdot P(x)=e^{\alpha x}[\alpha Q(x)+Q'(x)]$ adică $P(x)\equiv\alpha Q(x)+Q'(x)$. Prin identificare se determină coeficienții polinomului $Q(x)$.

II. Folosind metoda de mai sus să se calculeze primitivele care urmează, iar apoi pentru comparație pot să fie calculate și prin părți.

1) $\int e^{2x}(4x^3+3x+8)dx.$ 2) $\int x^3e^{2x}dx.$ 3) $\int(x^4+1)e^{-x}dx.$

TESTUL 201

I. Primitivele funcțiilor de forma $P(x)\sin x$ și $P(x)\cos x$, pot fi calculate prin părți, sau folosind metoda de mai jos:

„Se caută primitiva sub forma (1) $\int P(x)\sin\alpha x\,dx=Q(x)\sin\alpha x+R(x)\cos\alpha x+k$ unde $Q(x)$ și $R(x)$ sînt

polinoame de acelaşi grad cu $P(x)$. Se derivează relaţia (1) şi prin identificare se obţin

$$P(x) + \alpha R(x) = Q'(x)$$
$$\alpha Q(x) + R'(x) = 0$$

de unde prin identificare se determină coeficienţii necunoscuţi ai polinoamelor $Q(x)$ şi $R(x)$".

Folosind metoda de mai sus să se calculeze:

1) $\int (x^3 + x) \sin x \, dx$ 2) $\int x^4 \sin x \, dx$

3) $\int x^5 \sin 2x \, dx$ 4) $\int x^2 \sin 7x \, dx$

Pentru comparaţie se pot calcula aceste integrale şi prin părţi.

Primitivele funcţiilor de forma $f(x) = [P(x) \sin \beta x + Q(x) \cos \beta x] \cdot e^{\alpha x}$ pot să fie calculate prin părţi sau se caută sub forma (2) $\int e^{\alpha x} \cdot [P(x) \sin \beta x + Q(x) \cos \beta x] \, dx = e^{\alpha x} [R_1(x) \sin \beta x + R_2(x) \cos \beta x] + k$, unde polinoamele $R_1(x)$ şi $R_2(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi nedeterminaţi, de grad egal cu gradul cel mai mare dintre gradele lui $P(x)$ şi $Q(x)$. Coeficienţii polinoamelor $R_1(x)$ şi $R_2(x)$ se determină prin identificare după ce a fost derivată relaţia (2).

Se atrage atenţia că chiar dacă o funcţie trigonometrică lipseşte, ea poate apărea în primitivă.

II. Folosind integrarea prin părţi sau metoda expusă mai sus să se calculeze:

1) $\int x e^{2x} \cos x \, dx.$ 2) $\int e^x [x^2 \sin x + x \cos x] dx.$

3) $\int x^2 e^{3x} \cos 4x \, dx.$ 4) $\int e^{3x} [x \sin 2x + \cos 2x] dx.$

TESTUL 202

Să se calculeze (pe un interval $I \subset R$ pe care funcţiile de sub integrală admit primitive):

1. $\int \frac{x^2 + 2x - 4}{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} dx.$

2. $\int \frac{x^4}{x^3 - 1} \, dx.$

3. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^3 + 4)}.$

4. $\int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3}.$

5. $\int \frac{3x^2 + x - 2}{(x - 1)^3(x^2 + 1)} \, dx.$

6. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1} \, dx.$

TESTUL 203

Acelaşi enunţ ca în testul 202.

1. $\int \frac{1 + \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt[3]{x + 1}} \, dx.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 1)^4(x + 1)^2}}.$

3. $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$

4. $\int \frac{x^{n-1}(x^{2n} + 1)}{x^{4n} + 1} \, dx.$

TESTUL 204

Acelaşi enunţ ca în testul 202.

1. $\int \frac{\sin x \, dx}{3 \operatorname{ctg}^2 x + \cos^2 x}.$

2. $\int \frac{dx}{\cos x(2 \sin^2 x - 1)}.$

3. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} \, dx$

4. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} \, dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}.$

6. $\int \sin x \cos 2x \, dx.$

7. $\int \sin 3x \sin 4x \, dx.$

8. $\int \cos 2x \cos 3x \, dx.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

TESTUL 205

I. Să se studieze integrabilitatea funcțiilor de mai jos:

1. $f:[0, 1] \to R,\ f(x) = \sqrt{x}$;

2. $f: R \to R,\ f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$;

3. $f:(-\infty, 0) \to R,\ f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$;

4. $f:(0, +\infty) \to R\ f(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}$.

5. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \cos x & \text{pentru } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \operatorname{ctg} x & \text{pentru } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$.

II. Fie $f: I \to R$, unde I este un interval. Să se arate că dacă:

a) funcția a are proprietatea lui *Darboux*;

b) f are limite laterale în orice punct din I, atunci f este integrabilă pe I.

III. Să se studieze integrabilitatea funcției

$$f: I \to R,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} + 2x^2 - 5x + 10}{x^{2n} + x^2 + 9}.$$

TESTUL 206

Să se calculeze:

1. $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$; $m \in N$, $n \in N$.

2. $\int \frac{dx}{\sin^n x}$; $n \in N$.

3. $\int \frac{dx}{\cos^m x}$; $m \in N$.

4. $\int \mathrm{tg}^n x \, dx$; $n \in N$.

5. $\int \mathrm{ctg}^n x \, dx$; $n \in N$.

6. $\int \cos^n x \, dx$; $n \in N$.

TESTUL 207

Să se calculeze integralele:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$.

2. $\int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$.

3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x(1 + 3\mathrm{tg}^2 x)}$.

4. $\int_6^3 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$.

5. $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \mathrm{arctg}\, x \, dx$.

6. $\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x} dx$.

7. $\int_0^1 \frac{x - 2}{x + 1} \cdot \ln(x + 1) dx$.

8. $\int_0^2 [\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - (x - 2)^2}] \, dx$.

9. $\int_0^1 \frac{3x + 2}{(x + 2)(x^2 + x + 1)} dx$.

TESTUL 208

1. Fie integrala $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$; $n \in N$. Se cere:

a) Să se deducă o relație de recurență pentru calculul lui I_n.

b) Să se calculeze I_n.

c) Să se arate că șirul I_n este descrescător și are limita 0.

2. Să se calculeze: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(\sin x; \cos x)dx$.

TESTUL 209

1. Calculînd în două moduri integrala: $\int_0^1 (1 \pm x)^n dx$; $n \in N$, să se dovedească egalitățile:

a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$. b) $\frac{(-1)^k}{k+1} \cdot C_n^k = \frac{1}{n+1}$.

2. Fie șirul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx$; $n \in N$. Să se deducă o formulă de recurență pentru calculul lui I_n și cu ajutorul ei să se calculeze integrala dată.

TESTUL 210

1. Folosind definiția integralei să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției $f(x) = 2^x$, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 10$.

2. Folosind definiția integralei să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2}$. b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}}$.

3. Fie f o funcţie nenegativă strict crescătoare, pe intervalul $[a, b]$. Utilizînd interpretarea geometrică a integralei să se arate că:

a) dacă $f''(x) > 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, atunci $(b - a) f(a) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < (b - a)\dfrac{f(a) + f(b)}{2}$;

b) dacă $f''(x) < 0$, $(\forall) x \in [a, b]$ atunci $(b - a)\dfrac{f(a) + f(b)}{2} < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < (b - a)f(b)$.

II.9. APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE ŞI METODE DE CALCUL

TESTUL 211

I. Să se calculeze aria mulţimii $\Gamma_{f,g}$ cuprinsă între graficele funcţiilor:

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = 4 - \dfrac{1}{3} x^2$.

2. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \dfrac{1}{2}$, $x \in [0, \pi]$.

3. $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 7 - 6x$ şi axa oy.

II. Să se calculeze lungimile graficelor următoarelor funcţii:

1. $f(x) = \ln x$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

2. $f(x) = \ln \cos x$; $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

3. $f(x) = \ln x - \dfrac{x^2}{8}$; $x \in [1, e]$.

TESTUL 212

I. Să se calculeze ariile suprafețelor de rotație, determinate de funcțiile:

1. $f(x) = \sin x,\ x \in [0, \pi)$.
2. $f(x) = \sqrt{4 + x},\ x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$.
3. $f(x) = \frac{x^2}{2};\ x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

II. Să se calculeze:

1. Aria sferei.
2. Aria laterală a unui con circular drept.
3. Aria laterală a unui trunchi de con.

TESTUL 213

I. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație, determinate de funcțiile:

1. $f(x) = \sin^2 x,\ x \in [0, \pi)$.
2. $f(x) = x^2,\ x \in [-1, 1]$.

II. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația figurii plane mărginită de curbele:

1. $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ în jurul axei OX.
2. $f(x) = 2x - x^2,\ g(x) = 0$ în jurul axei OX.
3. $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \frac{2}{\pi} \cdot x$.
4. $f(x) = \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^2$ și axele de coordonate.

III. Să se determine centrele de greutate ale următoarelor plăci plane omogene:

1. $A = \{(x, y) / y \geqslant 0,\ y \leqslant \sin x,\ x \in [0, \pi]\}$.
2. $A = \{(x, y) / 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2},\ x \in [-a, a]\}$.
3. $A = \left\{(x, y) / \frac{2x}{\pi} \leqslant y \leqslant \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

II. 10. ELEMENTE DE CALCUL NUMERIC

TESTUL 214

Utilizînd metoda trapezelor să se calculeze:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$. 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

3. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 4. $\int_0^\pi \sin x \, dx$.

TESTUL 215

Să se calculeze aproximativ integralele, utilizînd formula lui *Simpson* şi formula trapezelor.

1. $\int_1^3 \frac{dx}{x}$. 2. $\int_0^2 e^{-x^2} \, dx$. 3. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \, dx$.

TESTUL 216

1. În urma unor experienţe privind rezistenţa reală a unei antene în funcţie de raportul dintre lungimea ei şi lungimea de undă, s-a definit funcţia empirică dată de tabelul de mai jos.

x	23,20	24,25	25,25	26,10
y	299	328	373	415

Se cere să se scrie parabola de ordinul al treilea care trece prin cele patru puncte, folosind polinomul de interpolare al lui *Lagrange*.

2. Fiind dată funcţia prin tabelul:

x	-2	1	2	4
y	24	-8	-15	-23

se cere să se formeze polinomul de interpolare al lui *Lagrange* şi să se calculeze valoarea lui y pentru $x = 0$.

3. Fiind dată funcția prin tabelul:

x	0	1	3	4	5
y	1	-7	14	215	400

se cere să se calculeze valoarea lui y pentru $x = 0{,}5$ și $x = 2$ folosind polinomul de interpolare al lui *Lagrange*.

TESTUL 217

1. Folosind metoda coardei să se determine rădăcina pozitivă a ecuației $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$ cu o precizie de 0,002.

2. Să se calculeze folosind metoda tangentelor rădăcina negativă a ecuației $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10\,000 = 0$ cu cinci cifre exacte.

3. Folosind metoda combinată să se calculeze cu o precizie de 0,0005 rădăcina pozitivă a ecuației $f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$.

TESTUL 218

1. Utilizînd metoda coardei să se calculeze rădăcinile reale ale ecuațiilor de mai jos cu o precizie de 0,001.

a) $x^3 - x + 1 = 0$; b) $x^3 - 5x - 1 = 0$.

2. Utilizînd metoda tangentei să se calculeze cu o precizie de 0,01 rădăcinile reale ale ecuațiilor:

a) $2x - \ln x - 4 = 0$; b) $2^x = 4x$.

II.11. ELEMENTE DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

TESTUL 219

Să se găsească soluțiile următoarelor ecuații diferențiale care satisfac condițiile inițiale date în dreptul fiecăreia:

a) $Y'(x) = 2x$, $Y(1) = 2$;

b) $Y'(x) = Y(x)$, $Y(0) = 2$;

c) $Y'(x) = 2xY(x)$, $Y(0) = 1$;

d) $Y'(x) = \frac{Y(x)}{x}$, $\qquad Y(1) = 1$;

e) $Y'(x) = e^{-Y(x)}$, $\qquad Y(0) = 1$;

f) $Y'(x) = \frac{x}{Y(x)}$, $\qquad Y(0) = 1$;

g) $Y'(x) = Y(x) \cdot \text{ctg } x$, $\qquad Y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$;

h) $Y'(x) + [1 - Y^2(x)]\text{tg } x = 0$, $\qquad Y(0) = 2$;

i) $Y'(x) = xe^x[Y^2(x) + 2Y(x) + 2]$, $\qquad Y(0) = -1$;

j) $Y'(x) = \frac{Y^2(x) + 1}{x^2 + 1}$, $\qquad Y(0) = 0$.

TESTUL 220

Să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale:

1) a) $3y^2y' = 2x$; b) $x(y + 1) - (x^2 + 1)y'y = 0$;

c) $y'' = 1$; d) $y'' = x$;

e) $y'' = \cos x$; f) $y'' = \sin x$.

2) a) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$;

b) $y' - xy = 1$ — să se determine soluția care satisface condiția $y(0) = 0$.

c) $xy' = (x + 1)y + x^2 - x^3$.

d) $xy' + y - x^2 \sin x = 0$; $x \neq 0$.

TESTUL 221

Să se integreze ecuațiile diferențiale:

1. $2x^2y' + xy = x^2 + 1$.

2. $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

3. $y' = -y + e^x;\qquad y = \frac{1}{e}$ pentru $x = 1.$

4. $y' + 2y = 4x;\qquad y = -2$ pentru $x = 0.$

5. $y' + y = \cos x;\qquad y = \frac{3}{2}$ pentru $x = 0.$

6. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$

7. $(x + 1)y' - xy = e^x(1 + x)^{n-1}.$

8. $2x^2y' + xy = x^2 + 1.$

9. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1.$

TESTUL 222

Să se integreze ecuațiile diferențiale:

1. $y'' - y = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = 0.$
3. $y'' + 5y' - 6y = 0$
4. $4y'' - y = 0.$
5. $y'' - 2y' + y = 0.$
6. $y'' + 10y' + 25y = 0.$
7. $y'' + y = 0.$
8. $y'' + y' + y = 0.$
9. $y'' + 3y' + 5y = 0.$
10. $y'' + 2y' + y = 0.$

TESTUL 223

Să se determine soluțiile ecuațiilor diferențiale care satisfac condițiile inițiale date în dreptul fiecăreia:

1. $y'' + y = 0,\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$

2. $4y'' - 8y' + 5y = 0\qquad y(0) = 0,\quad y'(0) = \frac{1}{2}.$

3. $y'' - y = 0,\qquad y(0) = 1,\quad y'(0) = 3.$

4. $y'' + y' - y = 0,\qquad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

5. $y'' + 4y' + 4y = 0,\qquad y(0) = 1,\quad y'(0) = 3.$

6. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$
7. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$
8. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = e.$
9. $y'' = 0, \quad y(1) = 1; \quad y'(2) = -3.$

TESTUL 224

Să se integreze ecuațiile diferențiale de mai jos:

1. $y'' - 2y' + y = x + 1.$
2. $y'' - 2y' + y = x^2.$
3. $y'' - 2y' + 2y = 2x^3 - 4x^2 + 6x + 2.$
4. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}.$
5. $y'' - 4y' + 3y = xe^x.$
6. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$
7. $y'' + y' - 2y = (6x + 5)e^x.$

TESTUL 225

Să se integreze ecuațiile diferențiale:

1. $y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 2x.$
2. $y'' + \omega^2 y = a \sin nx.$
3. $y'' + 2y' + 2y = \sin x.$
4. $y'' + y = 4x \sin x.$
5. $y'' + y' + y = (x^2 + 4x + 3) \cos x - 3 \sin x.$

TESTUL 226

1. Să se determine cîte o soluție particulară pentru ecuațiile diferențiale care urmează, folosind metoda variației constantelor a lui *Lagrange*.

a) $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x.$ b) $y'' - 4y' + 4y = x^4 e^{2x}.$
c) $y'' - y' + y = x.$ d) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x.$
e) $y'' - y' + 3y = x^2.$ f) $y'' - 2y' + y = e^x.$
g) $y'' + y = xe^x - 2e^{2x}.$ h) $y'' - 3y = e^x + 2e^{2x} - e^{3x}.$

II.12. TESTE RECAPITULATIVE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

TESTUL 227

I. Fie șirul cu termenul general

$$u_n = \frac{x^n + 1}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+p-1}} \quad \text{cu } x \in [0, +\infty); \text{ iar}$$

p este un număr întreg pozitiv dat.

1. Se definește $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Să se scrie funcția $f(x)$, pentru toate valorile pozitive ale lui x.

2. Să se arate că $f(x)$ este continuă pe intervalul $[0, \infty)$, derivabilă pe acest interval cu excepția punctului $x = 1$ și că derivatele laterale în 1 există și nu depind de p.

Să se construiască graficele C_0, C_1, C_2 ale funcției $f(x)$ corespunzătoare lui $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$.

3. Fie x_M, y_M punctul de extrem corespunzător graficului $C_2(p = 2)$ și fie S_0, S_1, S_2 ariile mărginite de axa OX și de dreptele $x = 0$ și $x = x_M$ corespunzătoare graficelor C_0, C_1, C_2. Să se arate că $S_1 + S_2 = S_0 + \frac{1}{2}$

(I.P., București, 1971)

II. Fie o funcție $f : [0, +\infty) \to R_+$, continuă. Să se demonstreze că funcția

$$F(x) = \frac{\int_a^x t^2 f(t)\,dt}{\int_a^x t f(t)\,dt},$$

este crescătoare pe intervalul $[a, +\infty)$, (unde $a > 0$).

III. Fie ecuația diferențială:

$$3e^{-3x} y^2 y' = 3x^2 - 7x - 15.$$

1) Să se găsească soluția generală.

2) Să se determine soluția particulară care satisface condiția inițială $y(4) = 0$ și mulțimea ei de definiție.

TESTUL 228

I. Să se studieze continuitatea și să se traseze graficele următoarelor funcții:

1. $f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}; \quad x \in R_+$

2. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{3^n + x^n}; \quad x \in R_+$

3. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^{2n+2}}{x^{2n}+1}}; \quad x \in R.$

II. Să se calculeze integrala $I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{6x - 9x^2}.$

III. Folosind proprietatea lui *Darboux* să se arate că funcțiile de mai jos admit cel puțin un zerou în intervalele specifice:

1. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x - 1$ în intervalul $I = (-1,\ 0).$
2. $g(x) = x \ln x - 2$ în intervalul $I = (1,\ e).$
3. $h(x) = x \cdot 3^x - 1$ în intervalul $I = (0,\ 1).$

IV. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale:

$$y'^2 + (2y - xy)y' - 2xy^2 = 0.$$

TESTUL 229

I. Se consideră funcția

$$f(x) = \sqrt{(x+5)(x-1)} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4} - 3}.$$

Să se studieze variația și să se reprezinte grafic această funcție.

II. O stație de beton este situată între două șosele perpendiculare OX și OY la distanțele de b și respectiv a km. Se cere să traseze un drum rectiliniu de lungime minimă, care să unească stația cu cele două șosele. Aplicația numerică $a = 8$ km, $b = 27$ km.

III. a) Să se arate că există un punct $M(x_0, y_0)$ aparținînd graficului funcției $f(x) = \dfrac{x^2 + |x^2 + x - 2|}{x + |x + 1|}$ cu $x_0 \in (1, 2)$, astfel încît tangenta la grafic în acest punct să fie paralelă cu dreapta care trece prin punctele $A\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ și $B\left(2, \dfrac{8}{5}\right)$.

b) Să se determine coordonatele punctului M și să se scrie ecuația tangentei la grafic în acest punct.

TESTUL 230

I. 1. Se consideră funcția $f : E \to R$, $f(x) = \arcsin x^{1 - \frac{1}{\ln x}}$ (E fiind domeniul maxim de definiție).

a) Să se studieze și să se reprezinte grafic.

b) Să se arate că $y = f(x)$ este o soluție a ecuației $xy'^3 - y'' = 0$ (1).

c) Să se stabilească expresia funcției primitive, a funcției f, care pentru $x = e$ are valoarea $\dfrac{\pi e}{2}$.

d) Să se scrie integrala generală a ecuației (1).

2. Se consideră funcția $f : E \to R$ derivabilă, definită prin compunerea:

$$f' \circ \ln x = \begin{cases} 1 \text{ pentru } 0 < x \leqslant 1 \\ x \text{ pentru } x > 1 \end{cases}$$

a) Să se construiască schema compunerii definite mai sus.

b) Să se exprime explicit funcția $f' : E \to R$ prin $f'(t)$ unde $t = \ln x$.

c) Să se exprime explicit funcția $f : E \to R$ prin $f(x)$ și anume primitiva care satisface condiția $f(0) = 1$.

(Concurs, 1972)

II. Se consideră funcția:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ pe intervalul } [100, 104].$$

Aplicînd formula creșterilor finite să se arate că:

$$\sqrt{104} - 10 < 0,2.$$

(A.S.E. București).

TESTUL 231

I. Fie șirul cu termenul general $a_{n+1} = f(n)$ astfel încît pentru orice $n \in N$ să existe relația $f(n+2) - 2f(n+1) = \dfrac{8f(n)}{2n-1}$ și $f(0) = -1$, $f(1) = 2$. Se cere:

1. Să se calculeze termenii: $a_3 = f(2)$; $a_4 = f(3)$; $a_5 = f(4)$.

2. Să se exprime termenul general $a_{n+1} = f(n)$ în funcție de n.

3. Să se calculeze suma $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$.

4. Fie șirul $b_n = S_n - 5$. Să se calculeze următoarele limite:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}; \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{\frac{b_{n+1}}{2b_n}} - 1\right); \quad k \in N.$$

II. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{k}{\sqrt[3]{n}\sqrt{n^2+k^2}}\right)^3$.

III. Să se calculeze:

$$I = \int_1^3 \frac{|x-1|+1}{|x-m|+1}\,dx; \quad x \in R, \ m \in R.$$

TESTUL 232

I. Fie funcția $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{4x^4 + bx^2 + c}$; a, b, c sînt parametri reali. Se cere:

1. Să se determine a, b, c astfel ca graficul funcției să intersecteze axa Oy în punctul de ordonată $y = \dfrac{1}{4}$ și să admită că asimptote verticale dreptele $x = 2$ și $x = \dfrac{1}{2}$.

2. Să se studieze variația funcției $f(x)$ cu a, b, c obținuți la punctul 1 și să se reprezinte grafic.

3. Să se calculeze aria delimitată de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = \dfrac{3}{4}$ și $x = \dfrac{5}{4}$.

II. Să se arate că funcția $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ nu are limita în $x = 0$.

III. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} x \leqslant \ln 2 - \frac{\pi}{4}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

TESTUL 233

1. În spațiul vectorial real R^4 se consideră vectorii:

$x_1 = (1, 2, 0, -1)$, $x_2 = (-1, 0, 3, 0)$, $x_3 = (2, 1, 0, 4)$ și

$$x_4 = (3, 0, -1, 5).$$

a) Să se arate că acești vectori constituie o bază.

b) Să se determine formulele de transformare a coordonatelor unui vector cînd în R^4 se trece de la baza e_1, e_2, e_3, e_4, la baza x_1, x_2, x_3, x_4, unde $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ și $e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

c) Dacă vectorul $x = (1, 0, -1, 3)$ este scris în baza e_1, e_2, e_3, e, folosind formulele de la punctul precedent, să se scrie în baza x_1, x_2, x_3, x_4.

2. Să se determine soluțiile generale ale ecuațiilor:

a) $xy' \ln x + y = ax(\ln x + 1)$, $x > 0$

b) $y' + y \cos x = e^{2x}$.

3. Fie ecuația liniară neomogenă $y' + P(x)y = Q(x)$.

Să se arate că:

a) Dacă y_1, y_2, y_3 sînt soluții particulare ale ecuației, atunci există relația $y_1 - y_2 = C(y_1 - y_3)$; unde C este o constantă arbitrară.

b) Dacă (T_1), (T_2), (T_3) sînt trei curbe integrale ale ecuației pe care se consideră punctele M_1, M_2, M_3 și M'_1, M'_2, M'_3 corespunzătoare absciselor x_i și respectiv x'_i dreptele $M_1M'_1$ și $M_2M'_2$, $M_3M'_3$ sînt concurente.

c) Tangentele la curbele integrale în punctele de aceeași abscisă sînt concurente.

TESTUL 149

1. Se știe că „un număr real „a" este limita șirului $(a_n)_{n \in N}$ dacă în afara oricărei vecinătăți a lui „a" se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului".

Faptul că în orice vecinătate a punctului a se află o infinitate de termeni ai șirului, nu exclude existența în afara unei vecinătăți a unei infinități de termeni ai șirului. De exemplu, fie șirul: 1, 0, 1, 0... 1, 0... În interiorul oricărei vecinătăți a lui 1 se află o infinitate de termeni ai șirului. Dar, spre exemplu în afara vecinătății $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ se află o infinitate de termeni ai șirului. Deci afirmația este falsă.

2. Se ține seama de regulile de negație:

$$„\rceil[(\exists x)p(x)] \equiv (\forall x) \ \rceil p(x)" \text{ și}$$

$$„\rceil[(\forall x)p(x)] \equiv (\exists x) \ \rceil p(x)".$$

3. a) Va trebui ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să se găsească un rang $N(\varepsilon)$, astfel încît relația $|a_n - a| < \varepsilon$ să aibă loc pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Deci, fie $\varepsilon > 0$, oarecare și odată ales îl fixăm. Trebuie găsit un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Dar, $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{4n+2}\right| < \varepsilon$ implică $n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Alegînd $N(\varepsilon) = \left[\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$ rezultînd că pentru orice $n > N(\varepsilon)$ are loc relația $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, adică $\frac{1}{2}$ este limita șirului cu termenul general $a_n = \frac{n}{2n+1}$.

b) Trebuie determinat numărul de termeni care se găsesc în afara vecinătăților $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}; \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right)$; $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}; \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right)$; $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1000}; \frac{1}{2} + \frac{1}{1\,000}\right)$. Cum numărul ter-

menilor care se află în afara vecinătății $\left(\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ este $N(\varepsilon)$, rezultă:

$$N\left(\frac{1}{10}\right)=\left[\frac{1-\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}}\right]=2;\ N\left(\frac{1}{100}\right)=25;\ N\left(\frac{1}{1000}\right)=250.$$

4. a). Se procedează analog ca la punctul 3a. b). Este un enunț echivalent cu acela de la punctul b, exercițiul 3.

5. Fie $\varepsilon>0$ oarecare, fixat. Atunci $\left|\frac{3^n+(-3)^n}{4^n}-0\right|=$

$$=\left|\frac{3^n}{4^n}+\frac{(-3)^n}{4^n}\right|<\frac{3^n+3^n}{4^n}=\frac{2\cdot 3^n}{4^n}<\varepsilon \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n<\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \lg \frac{3}{4}<\lg \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow n>\frac{\lg \frac{\varepsilon}{2}}{\lg \frac{3}{4}}. \text{ Deci } N(\varepsilon)=\left[\frac{\lg \frac{\varepsilon}{2}}{\lg \frac{3}{4}}\right], \text{ co-}$$

respunde lui $\varepsilon>0$ și pentru orice $n>N(\varepsilon)$ are loc relația $\frac{3^n+(-3)^n}{4^n}<\varepsilon$, adică șirul are limita zero.

6. În cazul în care n este impar, se observă că șirul este 0, 0, ..., 0, ..., deci are limita zero. Dacă n este număr par se consideră spre exemplu $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Oricare ar fi rangul N, pentru toate numerele naturale pare $n>N$ are loc relația:

$|a_n-0|=a_n=\frac{3^n+(-3)^n}{3^n}>2>\frac{1}{2}=\varepsilon$, adică în acest caz șirul nu are limita zero. Cum limita unui șir, dacă există, este unică, rezultă că șirul propus nu are limita zero.

7. Se consideră $\varepsilon = \frac{1}{2}$ și printr-un raționament analog celui de la punctul anterior se obține $|\cos n\pi - 1| = 2 > \frac{1}{2}$ pentru orice $n > N\left(\frac{1}{2}\right)$; n impar.

8. a) *Metoda I.* Presupunem că $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, există. Dar $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$ și $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$. Cum limita unui șir, dacă există, este unică rezultă că șirul propus nu are limită.

Metoda II. Se presupune că șirul $(a_n)_{n\in N}$ are limita a. Cum $a_{2n} = 1$ și $a_{2n+1} = -1$ înseamnă că a este un număr finit. Fie vecinătatea lui a, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ cu $0 < \varepsilon < 1$. Este evident că în cazul în care $a_{2n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ atunci $a_{2n+1} \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, deci pentru orice $N(\varepsilon) \geqslant 1$, $a_{2n+1} \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$, adică în afara acestei vecinătăți se află o infinitate de termeni ai șirului.

TESTUL 150

1. „Orice șir monoton și mărginit este convergent". Deci pentru fiecare șir va trebui studiată monotonia și apoi trebuie văzut dacă este mărginit. De exemplu: d) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > a_n$, deci șirul este strict crescător. Șirul nu este mărginit superior fiindcă $a_n \geqslant \sqrt{n}$. Într-adevăr, pentru $n = 1$ proprietatea este evidentă. Presupunem că proprietatea $a_n \geqslant \sqrt{n}$ este adevărată și să arătăm că este adevărată și pentru $n + 1$, adică $a_{n+1} \geqslant \sqrt{n+1}$. Dar, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} > \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$, fiindcă $\sqrt{n(n+1)} > n$. Șirul nu are limită finită și $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

g) Şirul este monoton fiindcă $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3^{n+1}+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{n+1} > a_n$. Vom arăta că este mărginit superior: $a_n =$ $= \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \ldots + \frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} =$ $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{1}{2}$.

Şirul fiind monoton şi mărginit rezultă că este convergent.

2. Fie şirurile de numere reale $(a_n)_{n\in N}$ şi $(\alpha_n)_{n\in N}$. Dacă există $n_0 \in N$, astfel încît pentru orice $n \geqslant n_0$; $n \in N$ au loc relaţiile:

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant a_n \leqslant \alpha_n \\ \text{şi} \\ (\alpha_n)_{n\in N} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n)_{n\in N} \to 0.$$

a) Dacă la un şir se adaugă (sau se exclude) un număr finit de termeni, natura şirului nu se schimbă. Pentru $n > 4$ se poate scrie: $0 < \frac{n^3}{n!} = \frac{n^3}{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} <$ $< \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$. b) $0 < \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}$.

d) Pentru $n > 1$ avem: $0 < a_n = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots 2n} <$

$$< \frac{\overbrace{n!+n!+\ldots+n!}^{\text{de } n \text{ ori}}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots 2n} = \frac{n\cdot n!}{n!(n+1)(n+2)\ldots 2n}.$$

3. a) Este evident faptul că şirul este strict crescător. Pentru a arăta că este majorat superior se observă că: $a_1 =$ $= \sqrt{2} < 2$, $a_2 = \sqrt{2+a_1} < \sqrt{2+2} = 2$, $a_3 = \sqrt{2+a_2} =$ $= \sqrt{2+2} = 2$. Presupunînd că $a_n < 2$ atunci rezultă că $a_{n+1} < \sqrt{2+a_n} < 2$. Şirul fiind monoton şi mărginit este convergent. Pentru calculul limitei se poate proceda astfel: se notează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$ şi din relaţia $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ rezultă

că $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (2 + a_{n-1})$, adică $t^2 = 2 + t$ de unde $t_1 = 2$ și $t_2 = -1$. Cum $t_2 = -1 < 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

b) Dacă $n > 2$ atunci $a_{n-1} = \dfrac{\prod\limits_{k=2}^{n} (k-1)(k+1)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k^2\right)} = \dfrac{n+1}{2n}$

și $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = \dfrac{1}{2}$.

c) Se arată că pentru $n > 2$, $a_{n+1} - a_n < 0$ și cum $a_i > 0$ rezultă că șirul este mărginit. Dacă $t = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, din relația $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{5 + 2n}{4 + 3n}$ rezultă că $t = t \cdot \dfrac{2}{3}$ de unde avem $t = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

TESTUL 151

1. 3. **2.** -1. **3.** 0. **4.** ∞. **5.** $-\infty$. **6.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** $-\dfrac{1}{2}$. **8.** 0. **9.** $\dfrac{1}{2}$. **10.** $\dfrac{1}{3}$. **11.** $\dfrac{1}{2}$. **12.** Se poate scrie: $a_n =$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} k}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

13. $$a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)}{\sum_{k=1}^{n} k^3} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k)}{\sum_{k=1}^{n} k^3} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n} k^3} =$$

$$= \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}}{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}.$$

TESTUL 152

Pentru a calcula limitele trebuie mai întîi să se determine sumele respective.

1. Se observă că $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Se descompune în fracții simple $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$. Amplificînd cu $k+1$, pentru $k = -1$ rezultă $B = -1$ și amplificînd cu k pentru $k = 0$ rezultă $A = 1$ și astfel se obține $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$;

pentru $k = 1$, $\Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$;

pentru $k = 2$, $\Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$;

pentru $k = 3$, $\Rightarrow \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

. . . .

pentru $k = n \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Rezultă: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Deci $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

La exercițiile 2 și 3 se aplică același procedeu, obținîndu-se:

2) $\frac{1}{2}$. **3)** $\frac{13}{36}$.

4. Se observă că $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Se scrie:

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

atunci $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

5. Folosind proprietățile logaritmilor rezultă:

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln \frac{n+1}{2n} \text{ și}$$

$$\lim_{n \to \infty} \ln \frac{n+1}{2n} = \ln \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2.$$

Desigur, calculul sumei de mai sus se poate transcrie şi astfel:

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) +$$

$$+ \ln\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\ldots$$

$$\ldots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \ln\frac{n+1}{2n}.$$

6. Se scrie: $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{(k+1)} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\ldots\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}$ şi

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. **7.** Se observă că: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2+2k}{(k+1)^2} =$

$= \log_{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{2(n+1)}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1.$

8. Se observă că: $a_n = \frac{1}{0!+1!} + \frac{1}{1!+2!} + \ldots +$

$+ \frac{1}{(n-1)!+n!}$. Se scrie: $\frac{1}{(k-1)!+k!} = \frac{1}{(k-1)![1+k]} =$

$= \frac{k}{(k-1)!\,k(k+1)} = \frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} -$

$- \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$, adică: $\frac{1}{(k-1)!+k!} = \frac{1}{k!} -$

$- \frac{1}{(k+1)!}$. În continuare se procedează ca la exerciţiul 1

din acest test. Este evident că se poate scrie şi astfel:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!+k!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right]$$ etc. Deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

9. Se descompune în factori $9k^2 - 3k - 2 = (3k-2)(3k+1)$ şi atunci: $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1}$ şi efectuînd calculele se obţine $\frac{1}{(3k+1)(3k-2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right]$.

În continuare se procedează ca la exerciţiul 1. Altfel, se scriu succesiv: $\frac{1}{9k^2-3k-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3k+1)-[3(k-1)+1]}{(3k+1)[3(k-1)+1]} =$
$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3(k-1)+1} - \frac{1}{3k+1}\right]$ şi $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2-3k-2} =$
$= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3(k-1)+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k+1}\right] = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) =$
$= \frac{n}{3n+1}$. Deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

10. Se scriu logaritmi în baza a, se notează $\log_a N = t$ şi se obţine $a_n = t + \frac{t}{b} + \ldots + \frac{t}{b^n} = \frac{b}{b-1} t - \frac{1}{b-1} t \cdot \left(\frac{1}{b^n}\right)$.

Şirul este convergent pentru $b > 1$, şi $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{b-1} \log_a N$.

TESTUL 153

1. Se observă că pentru n impar şirul este crescător, iar pentru n par şirul este descrescător. Şirul nu este monoton. În plus avem relaţia: $a_1 < a_3 < a_5 \ldots < a_{2k+1} < \ldots < a_{2k} < < a_{2k-2} < \ldots a_4 < a_2$, deci şirul este mărginit fiindcă $a_n \in [a_1, a_2]$. Calculînd limitele celor două subşiruri (pentru n par şi pentru n impar) rezultă că au aceeaşi limită, deci şirul este convergent şi $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. a) Conform enunțului trebuie să avem:

$$\frac{(n+3)^2+3}{n(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{nA+B}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{(n+1)A+B}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Prin identificare se obțin $A=1$ și $B=3$ de unde rezultă că,

$$a_n=\frac{n+3}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}.$$

b) Cum $b_n=1-\dfrac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1.$

c) Avem:

$$c_n=\left[1-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right]^{n\cdot 2^n}$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

3. Se consideră raportul

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{f(n+2)f(n)}{f^2(n+1)}=\frac{[(n+2)!]^{\frac{1}{n+2}}\cdot[n!]^{\frac{1}{n}}}{[(n+1)!]^{\frac{2}{n+1}}};$$

de unde

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=(n!)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}=$$

$$=(n!)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Ținînd seama de inegalitatea mediilor rezultă că:

$$(n!)^{\frac{1}{n}}<\frac{1+2+\ldots n}{n}=\frac{n+1}{2},\ \text{și cum}\ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<e,$$

rezultă că $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}<\dfrac{1}{2}\sqrt{e}<1.$

TESTUL 154

1. a) Mai întîi se găsește expresia termenului general a_n procedînd astfel:

$$a_0 - a_1 = \frac{1}{2!}$$

$$a_1 - a_2 = \frac{2}{3!}$$

$$a_2 - a_3 = \frac{3}{4!}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1} - a_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$a_0 - a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}.$$

Dar $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ și ținînd seama că $a_0 = 2$ și de exercițiul 8 testul 152 rezultă $a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!}$ b) Șirul este descrescător și mărginit inferior, deci este convergent.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)!\ln\left[1 + \frac{1}{(n+1)!}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left[1 + \frac{1}{(n+1)!}\right]^{(n+1)!} =$
$= \ln e = 1.$

2. Se aplică inegalitatea lui *Bernoulli* $(1 + x_n)^n \geqslant 1 + nx$ pentru $x = \frac{1}{n^2-1}$ și se obține: $\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geqslant 1 + + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$ sau încă $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+1}{n}$ adică: $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow u_{n-1} \geqslant u_n$. Șirul fiind cu

termeni pozitivi (deci mărginit inferior) înseamnă că este convergent și $\lim_{n\to\infty} u_n = c$.

3. Cum $0 < a_1 < \frac{1}{2}$; $a_2 = a_1 + \frac{a_1^2}{2} > a_1 \ldots a_{n-1} < a_n$,

rezultă că șirul este crescător și atunci $a_n = \frac{\alpha}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2} <$

$< \frac{\alpha}{2} + \frac{a_n^2}{2} \Rightarrow a_n^2 - 2a_n + \alpha > 0 \Rightarrow a_n < 1 - \sqrt{1-\alpha}$ și

$a_n > 1 + \sqrt{1-\alpha}$, dar $\alpha \in (0, 1) \Rightarrow a_n \in (0, 1)$. Dacă se notează $t = \lim_{n\to\infty} a_n$ trecînd la limită în relația $a_n = \frac{\alpha}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$

rezultă $t = \frac{\alpha}{2} + \frac{t^2}{2}$ de unde $t = 1 \pm \sqrt{1-\alpha}$ și cum

$a_n \in (0, 1)$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-\alpha}$.

4. Ținînd seama că $a_{n+1} = r\, a_n$ (unde $r > 1$ este rația) rezultă că $a_{k+1}^p + a_k^p = a_k^p(1 + r^p)$ și $a_{k+1}^p - a_k^p = a_k^p(r^p - 1)$, $(k = 1, 2, \ldots n)$ și în final avem:

$$S_n = \frac{1}{1 + r^p}\left(\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n^p}\right)$$

$$S_n' = \frac{1}{r^p - 1}\left(\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n^p}\right).$$

Este evident că raportul $\frac{S_n}{S_n'} = \frac{r^p - 1}{r^p + 1}$ nu depinde de n.

b) Cum $a_{n+2} = a_n \cdot r^2$ și $a_{n-2} = \frac{a_n}{r^2}$ și progresia este crescătoare, înlocuind în relația dată se obține $r = 2$.

c) $\lim_{p\to\infty}\left(\frac{S_n}{S_n'}\right)^p = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{r^p + 1 - 2}{r^p + 1}\right)^p = \lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{2}{r^p + 1}\right)^p =$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[\left(1 - \frac{2}{r^p + 1}\right)^{-\frac{r^p+1}{2}}\right]^{\frac{-2p}{r^p+1}} = 1.$$

1. Dacă $a_1 = 0$ rezultă că $(\forall)\ n \in R$, $a_n = 0$. Dacă $a_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{2n+1} = \frac{[na_2 - (n-1)a_1]^2}{a_1} \text{ și}$$

$$a_{2n} = \frac{[na_2 - (n-1)a_1][(n-1)a_2 - (n-2)a_1]}{a_1}.$$

2. Deoarece $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-2}) = 0 \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N(\varepsilon)$ astfel încît $(\forall)\ n > N(\varepsilon)$, avem: $|a_n - a_{n-2}| < \varepsilon$. Pentru n_0 fix avem: $a_n - a_{n_0} = (a_n - a_{n-2}) + (a_{n-1} - a_{n-3}) + (a_{n-2} - a_{n-4}) + \ldots - [(a_{n_0} - a_{n_0-2}) + (a_{n_0-1} - a_{n_0-3}) + \ldots]$. Dacă $n > N(\varepsilon)$ din relația $|a_n - a_{n-2}| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon(n - n_0) + a_{n_0-1} - a_{n-1} < a_n - a_{n_0} < (n - n_0)\varepsilon + a_{n-1} - a_{n_0-1} \Rightarrow -\varepsilon(n - n_0) < a_n + a_{n-1} - (a_{n_0} + a_{n_0-1}) < (n - n_0)\,\varepsilon \Rightarrow n\, \frac{n - n_0}{n}\varepsilon < \frac{a_n + a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n_0} + a_{n_0-1}}{n} < \frac{n - n_0}{n}\,\varepsilon$. Cum n_0 este fixat, pentru $n \to \infty$, $\frac{a_{n_0} + a_{n_0-1}}{n} \to 0 \Rightarrow (\exists)\ N_1(\varepsilon)$, astfel ca $\left|\frac{a_{n_0} + a_{n_0-1}}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow (\forall)\ n > \max[N(\varepsilon); N_1(\varepsilon)]$ avem $\left|\frac{a_n + a_{n-1}}{n}\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n + a_{n-1}}{n} = 0.$

3. Se scrie succesiv: $a_n = n - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2 + 3k + 2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right] = \frac{n}{2(n+2)}$.

Pentru b_n avem: $b_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{2}{2\cdot 4}\cdot\frac{3}{2\cdot 5}\cdots\frac{n-2}{2n}\cdot\frac{n-1}{2(n+1)}\cdot\frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{2^{n-1}(n+1)(n+2)}$.

TESTUL 156

1. Șirul b_n este convergent $\Leftrightarrow \sin a = 0 \Leftrightarrow a = k\pi, k \in Z$.
2. Pentru a arăta că șirul este convergent se arată că este crescător și mărginit superior. Acest lucru se face folosind metoda inducției matematice. Se notează cu l limita șirului. Pentru a determina pe l se trece la limită în relația $a_{n+1} = \frac{1}{3}[b + a_n + a_{n-1}^2]$ și se obține $l = \frac{1}{3}[b + l + l^2] \Rightarrow l_1 = 1 - \sqrt{1-b}$ și $l_2 = 1 + \sqrt{1-b}$. Cum $a_n < 1 \Rightarrow l = 1 - \sqrt{1-b}$.

3. Șirul este descrescător și $\frac{2 + a_n^2}{2a_n} \geqslant \sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; **5.** $\alpha = -\frac{1}{4}$.

TESTUL 157

1. a) Notăm: $b_n = \sqrt[n]{a_n}$ și $\ln b_n = \frac{1}{n} \ln a_n$ și aplicînd lema lui *Stolz* avem

$$\lim_{n\to\infty} \ln b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

adică $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Reamintim enunțul lemei lui *O. Stolz*: „Fie $(x_n)_{n\in N}$ un șir arbitrar, și $(y_n)_{n\in N}$ un șir divergent. Dacă $i_1)$ $(y_n)_{n\in N}$ este un șir monoton; $i_2)$ există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A$ (finită), atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$".

2. a) $\lim \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

b) Cum $x_n = 1! + 2! + \dots + n!$, iar $y_n = (2n)!$, îndeplinesc condițiile impuse în lema lui *Stolz* rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n! + (n+1)! - (1! + 2! + \dots + n!)}{(2n+2)! - (2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!\,[(2n+1)(2n+2) - 1]} = 0.$$ c) 0. d) $\frac{2}{3}$.

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. f) ∞. g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{3(n+1)}[(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!}}{\dfrac{3^{3n}\cdot(n!)^3}{(3n)!}}$$ etc. h) 0.

TESTUL 158

1. Se spune că seria numerică $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ este convergentă dacă șirul sumelor parțiale este convergent. În aceste condiții dacă $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, S se numește suma seriei și se scrie $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$.

a) Pentru a pune în evidență faptul că seria armonică nu este convergentă se va arăta că șirul sumelor

parțiale nu este convergent. Pentru aceasta se consideră inegalitățile:

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

....

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$, adică suma S_k (pentru k suficient de mare) devine oricît mare, adică șirul sumelor parțiale (S_n) este nemărginit și în concluzie nu este convergent.

b) Pentru a arăta că seria armonică generalizată este convergentă pentru $\alpha > 1$, se pornește de la inegalitățile:

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} < \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

$$\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} < \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} = \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}}$$

....

$\frac{1}{2^{k\alpha}} + \frac{1}{2^{k\alpha}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{(k+1)\alpha}-1} < \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}$, adică:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{[2^{(k+1)}-1]^\alpha} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2}{2^{\alpha-1}-1}.$$

Dar pentru $(\forall)\ n \in N$ se poate alege $k \in N$ astfel încît $n < 2^{k-1} - 1$ și atunci $1 \leqslant S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} < 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{2^{\alpha(k-1)} - 1} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}}$. Deci pentru $\alpha > 1$ șirul sumelor parțiale (S_n) este mărginit și cum $S_{n+1} > S_n$, rezultă că seria armonică generalizată (cînd $\alpha > 1$) este convergentă. (În legătură cu ultima parte a demonstrației vezi exercițiul 3.)

2. a) și b). Această condiție nu este suficientă. De exemplu, seria armonică $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, satisface proprietatea că $\frac{1}{n} \to 0$, dar după cum s-a arătat la primul exercițiu este divergentă. c) În acest caz seria nu este convergentă.

3. Seria fiind cu termeni pozitivi rezultă că $S_{n+1} = u_1 + u_2 + \ldots u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} > S_n$. Deci șirul sumelor parțiale este monoton (crescător). Dacă acest șir este și mărginit rezultă că (S_n) este convergent. Adică seria $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ este convergentă.

TESTUL 159

1. Cum studiul convergenței unei serii numerice revine la studiul convergenței șirului numeric $(S_n)_{n \in N}$ al sumelor parțiale rezultă că în toate cele trei cazuri natura seriei rămîne aceeași.

2. a) Șirul sumelor parțiale are termenul general: $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Limita acestui șir este calculată în testul 152. Pentru seriile de la punctele b) c) d) sînt calculate $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ în testul 152.

TESTUL 160

1. Termenul general al seriei este $u_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}$, dar $u_n < \frac{1}{n^2}$ oricare ar fi $n \geq 1$, $n \in N$. Deci $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Dar $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \delta_n$ reprezintă termenul general al şirului sumelor parţiale pentru seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$. Deci δ_n este mărginit și cum $0 < S_n < \delta_n$ rezultă că şi S_n este mărginit, deci seria este convergentă.

2. Termenul general fiind $u_n = \frac{1}{n\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{n^{3/2}}$ pe baza aceluiași raționament (de mai sus) se arată că seria este convergentă.

3. Se observă că $u_n = \frac{1}{n \cdot 3^{n+1}} \leqslant \frac{1}{3^n}$. Dar $\frac{1}{3^n}$ este termenul general al seriei geometrice $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$, cu rația mai mică decît 1. Cum seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ este convergentă, rezultă că şirul $\delta_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$ este mărginit şi atunci $S_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 3^n}$ este mărginit. **4.** Seria este divergentă.

5. Termenul general al seriei $u_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ nu tinde către zero (conform testului 149); rezultă că seria este divergentă. **6.** Se observă că $u_n = \frac{n \sin^2 \frac{n\pi}{4}}{2^n} \leqslant \frac{n}{2^n}$ etc.

10

22

1. a) Se consideră șirurile $x_n = 1 + \frac{1}{n\pi}$ și $x'_n = 1 + \frac{2}{(4n+1)\pi}$ care tind către 1 și sînt diferite de 1. Cum $f(x_n) = \sin n\pi = 0$, iar $f(x'_n) = \sin \frac{4n+1}{2}\pi = 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$. Deoarece aceste limite sînt diferite, rezultă că funcția nu are limită în punctul $x = 1$. b) și c) Se consideră șirurile $x_n = 2n\pi \to \infty$ și $x'_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} \to \infty$. d) Se consideră șirurile $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ și $x'_n = -\frac{1}{n} \to 0$. **2.** a) Se observă că $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \frac{0}{0}$.

Pentru a înlătura nedeterminarea se scrie

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+5+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11}.$$

b) Este tot cazul $\frac{0}{0}$ și se poate proceda ca mai sus, sau se notează $x = 2 + \alpha$ și pentru $x \to 2 \Rightarrow \alpha \to 0$. Deci

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2+\alpha-2}{(2+\alpha)^2-3(2+\alpha)+2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2+\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\alpha+1} = 1.$$

c) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}\right)} = \frac{2}{3}$. d). Limita conduce la cazul $\frac{0}{0}$. Atunci se procedează astfel: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x[\sqrt{1+3x}+1]}{1+3x-1} = \frac{2}{3}.$$

e) Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)=\infty-\infty$ se amplifică cu conjugata expresiei:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}+x}=-\frac{3}{2}.\quad f)\ \frac{1}{2}.\quad g)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5x+1}}{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$h)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

TESTUL 162

Se folosește faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. **1.** $\dfrac{1}{20}$. **2.** 3. **4.** $-\dfrac{1}{5}$.

5. -2. **6.** -1. **7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

8. 2. **9.** $\dfrac{1}{2}$. **10.** $-\dfrac{1}{2}$. **11.** $\dfrac{1}{4}$.

TESTUL 163

Se știe că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. Se procedează astfel:

$$\mathbf{1.}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{x}{x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}}=e^0=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^x =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-1}{x+1}\right]^x = \lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{-1}{x+1}\right]^{-(1+x)}\right\}^{\frac{-x}{x+1}} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad \textbf{3.}\ \frac{1}{e^2}.$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} [1+\sin x-1)]^{\operatorname{tg} x} =$

$$= \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \left\{[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}\right\}^{\operatorname{tg} x(\sin x-1)} = e^0 = 1.$$

5. e^2. 6. 1. 7. 1. 8. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2-1}\right) = \infty - \infty$, se amplifică cu conjugata expresiei și rezultă:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1-x^3-x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+}$$

$$\frac{x^3+x^2+1-x^3-x^2+1}{+\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}} = 0.$$

9. $\frac{2}{a}$. 10. $e\sqrt{e}$. 11. $e^{-\frac{1}{e^2}}$.

TESTUL 164

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{pentru } \alpha\in(1,\ +\infty) \\ 0 & \text{pentru } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{pentru } \alpha\in(-\infty,\ 1) \end{cases}$

2. a) Se poate proceda astfel: se consideră șirul

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad x_n \nearrow 1 \Rightarrow f(x_n) = \frac{x_n}{x_n - 1} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -\frac{n-1}{1}.$$

Deci

$$l_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty.$$

Altfel: $\lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$

b) $l_d(2) = \lim\limits_{x \searrow 2} \frac{2x}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \searrow 2} \frac{2x}{(x+2)(x-2)} =$

$$= \frac{4}{0^+ \cdot 4} = +\infty.$$

Altfel; se consideră șirul

$$x_n = 2 + \frac{1}{n}; \quad x_n \searrow 2 \Rightarrow f(x_n) = \frac{2n(2n+1)}{4n+1} \text{ etc.}$$

c) Se consideră șirul

$$x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n \nearrow 0 \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{2 - 2^{-n}}$$

și

$$l_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 - 2^{-n}} = \frac{1}{2}.$$

Altfel: $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{0^-}}} = \frac{1}{2}.$

d) Se consideră șirul $x_n = \frac{1}{n}$; $x_n \searrow 0 \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{2 - 2^n}$ și $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. e) ∞.

f) $\lim_{x \nearrow 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$. g) $\lim_{x\searrow 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} =$ $= e^{\infty} = \infty$. h). ∞.

3. O funcție $f : E \subset R \to R$ are limită în punctul x_0(x_0 punct de acumulare al mulțimii E) dacă și numai dacă limitele laterale în acest punct există și sînt egale.

a) $l_s(1) = \lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin 4(x-1)}{5(x-1)} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sin 4(x-1)}{4(x-1)} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \text{ și } l_d(1) = \lim_{x\searrow 1} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{\operatorname{tg} 3(x-1)}{\sin(x-1)} + \frac{1}{5}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{\operatorname{tg} 3(x-1)}{3(x-1)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{x-1}{\sin(x-1)}\cdot 3 + \frac{1}{5}\right] = \frac{4}{5}. \text{ Deci } l_s(1) = l_d(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{5}.$$

b) $l_s(3) = \lim_{x\nearrow 3} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-3}}} = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} =$

$$= 1;\ l_d(3) = \lim_{x\searrow 3} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{\sin(x-3)}{2(x-3)} = \frac{1}{2}.$$

c) $l_s(0) = l_d(0) = 1$. d) $l_s(-1) \neq l_d(-1)$.

TESTUL 165

O funcție $f : E \subset R \to R$, este continuă în punctul $x_0 \in E$ dacă și numai dacă funcția are limită în x_0, egală cu $f(x_0)$. Dacă o funcție este continuă în fiecare punct al mulțimii E, atunci se spune că funcția este continuă pe mulțimea E

a) Se știe că funcțiile elementare sînt continue pe domeniul lor de definiție. Problema continuității funcției f se pune în

punctele $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{4}$. Pentru $x = 0$ se calculează: $l_s(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ și $l_d(0) = \lim_{x \to 0} \sin 2x = 0$. Deoarece $l_s(0) \neq l_d(0)$, funcția nu are limită în punctul $x = 0$ și nu este continuă în acest punct. Acest punct este un punct de discontinuitate de prima speță. Pentru $x = \frac{\pi}{4}$ se obține: $l_s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = 1$, $l_d\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \searrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x = 1$. Deci $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = 1$ și cum $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$; rezultă că funcția este continuă în $x = \frac{\pi}{4}$. Așadar este continuă pe mulțimea $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$.

b) Funcția se mai scrie:

$$f(x) = \begin{cases} -x\, e^{\frac{1}{x+1}} & \text{pentru } x \in [-2, -1) \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = -1 \\ e^{\frac{1}{\sin(x+1)}} & \text{pentru } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Deoarece $l_d(-1) \neq l_s(-1)$ rezultă că punctul $x = -1$ este punct de discontinuitate al funcției. Pentru celelalte subpuncte a se revedea testul 13.

TESTUL 166

1. Fie $(a_n)_{n \in N}$ un șir de numere iraționale care tinde către un număr irațional x_0, de exemplu $a_n = \frac{n x_0}{\sqrt{n^2 + 1}} \Rightarrow f(a_n) = 0 \to 0$. Pentru un șir de numere raționale care tinde către același număr irațional x_0 avem $f(a_n') = \frac{1}{n} \to 0$. Deci funcția

este continuă în orice punct irațional. Dacă x_0 este număr rațional se consideră șirul $(b_n)_{n\in N}$ un șir de numere raționale care tinde către x_0, de exemplu $b_n = \frac{nx_0}{n+1}$; $x_0 = \frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in Z \setminus \{0\}$, avem $f(x_0) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$, iar $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \frac{1}{q}$, dar dacă șirul $(a_n')_{n\in N}$ este un șir de numere iraționale care tinde către numărul rațional $x_0 \Rightarrow f(a_n') = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} f(a_n') = 0 \neq f(x_0) = \frac{1}{q}$. Deci funcția este discontinuă în orice punct rațional.

2. Fie $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ și un șir de numere raționale $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in [0, 1]$, cu $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, iar $(b_n)_{n\in N}$ un șir de numere iraționale cu $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$. Deci $f(a_n) = a_n \to x_0$, iar $f(b_n) = 1 - b_n \to 1 - x_0 \Rightarrow (\forall)\ x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ funcția este discontinuă. Pentru $x_0 = \frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. $f\left(0 + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = \alpha$ (constant).

Dacă $x = \frac{1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{2}{n}\right) = \alpha$, și prin inducție $f\left(\frac{p}{n}\right) = \alpha$, $p \in N$. Dacă $x = -\frac{1}{n}$, $f\left(-\frac{p}{n}\right) = \alpha$. Dacă $x_0 \in R$, $(\exists)$ un șir $(x_n)_{n\in N}$ cu $x_n \in Q$, astfel ca $x_n \to x_0$, deci $f(x_n) \to f(x_0)$, dar $f(x_n) = \alpha$,

4. b) Dacă în ecuație se consideră $x = y \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$ și prin recurență se obține $f(px) = f[(p-1)x + x] = (p-1)f(x) + f(x) = pf(x)$. Dar $f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0$ și atunci $f(-x) = -f(x)$, de unde rezultă că

proprietatea este adevărată pentru $p \in Z$. Fie $p = \frac{m}{n} \in$ $\in Q \Rightarrow f(px) = f\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right)$. Dar $f(x) = f\left(\frac{n}{n} x\right) =$ $= nf\left(\frac{x}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x)$ deci $f(px) = \frac{m}{n} f(x) = pf(x)$.

TESTUL 167

1. Se calculează limitele laterale, în punctele x_0 în care se pune problema continuității și se pun condițiile $l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$. a) $\alpha = 5$. b) $\alpha = e^2$. c) $\alpha = \frac{5}{6}$.

2. Dacă f este surjectivă $\Rightarrow (\exists)$ $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ astfel ca $f(x_1) = a$ și $f(x_2) = b$. Presupunînd că nu există $x_0 \in [a, b]$ astfel ca $f(x_0) = g(x_0)$, atunci $(\forall)$ $x \in [a, b]$, $f(x) - g(r) > 0$ sau $f(x) - g(x) < 0$. În primul caz vom avea: $f(x_1) - g(x_1) = a - g(x_1) > 0 \Rightarrow g(x_1) < a$, absurd. În celălalt caz $\Rightarrow g(x_2) > b$, absurd. Deci există $x_0 \in [a, b]$ astfel ca $f(x_0) = g(x_0)$.

5. Funcția se mai scrie $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ -1 - x^2 & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$

și are graficul trasat în figura 58. Codomeniul său este $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$. Se observă că funcția este bijectivă și discontinuă în punctul $x = 0$.

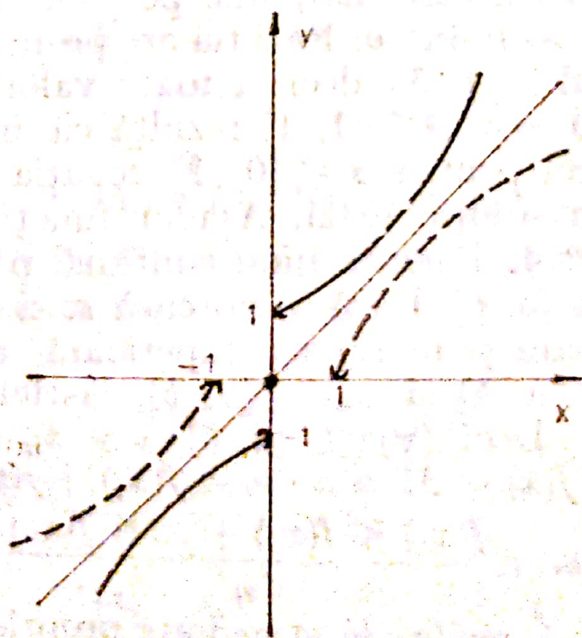


Fig. 58

Funcţia se poate inversa şi:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-1+x} & \text{pentru } x > 1 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ -\sqrt{-1-x} & \text{pentru } x < -1 \end{cases}$$

Graficul funcţiei inverse este graficul punctat din figura 58. Cum $x = 0$, este punct izolat al domeniului de definiţie, rezultă că funcţia este continuă pe domeniul său de definiţie care este $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$.

TESTUL 168

1. Funcţia f, fiind o funcţie continuă pe intervalul închis şi mărginit (compact) $[-1, 1]$ este mărginită şi îşi atinge marginile pe $[-1, 1]$.

2. a) Funcţia se mai scrie

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{pentru } x \in [-1, 0) \\ x & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ 2x^2 - \alpha & \text{pentru } x \in [1, 2) \\ \beta x^3 - 1 & \text{pentru } x \in [2, 3] \end{cases}$$

şi este continuă pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 1$. b) Cu α şi β determinaţi mai sus, funcţia este continuă pe intervalul închis şi mărginit $[-1, 3]$ şi atunci are proprietăţile: b) este mărginită pe $[-1, 3]$, c) îşi atinge marginile pe $[-1, 3]$. d) este uniform continuă pe $[-1, 3]$. e) Funcţia are proprietatea lui *Darboux* pe intervalul $[-1, 3]$, deci ia toate valorile din codomeniu. **3.** Cum $\sin x = y \in [-1, 1]$ rezultă că $\inf f(x) = 0$ şi $\sup f(x) = 2$, deci pentru $\alpha \in [0, 2]$ ecuaţia $\sin x = \alpha - 1$ are totdeauna o soluţie reală. Aşadar funcţia are proprietatea lui *Darboux*. **4.** Funcţia fiind continuă pe $[a, b]$, atunci este mărginită pe $[a, b]$. Dacă se notează m şi M, respectiv marginea inferioară şi marginea superioară a funcţiei, atunci există $x_m \in [a, b]$ şi $x_M \in [a, b]$, astfel ca $f(x_m) = m$ şi $f(x_M) = M$. Deci $(\forall) x \in [a, b]$, $x \neq x_m$ şi $x \neq x_M$ are loc relaţia $m < f(x) < M \Rightarrow n \cdot m < f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) < < n \cdot M \Rightarrow m < \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} < M$. Dar funcţia fiind continuă pe $[a, b]$ atunci are proprietatea lui *Darboux*

pe intervalul $[a, b]$ şi rezultă că există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel ca:

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

5. Deoarece $f(0) = -e < 0$ şi $f(1) = e^2 - e = e(e-1) > 0$ rezultă că există un punct $\xi \in (0, 1)$ astfel ca $f(\xi) = 0$.

TESTUL 169

1. Avînd în vedere interpretarea geometrică a derivatei, se pun condiţiile: a) $f'(x) = 0 \Rightarrow A(\sqrt{2}, 1 - 4\sqrt{2})$; $B(-\sqrt{2}, 1 + 4\sqrt{2})$. b) $f'(x) = 6 \Rightarrow A_1(2, -3); B_1(-2, 5)$. c) $f'(x) = 21 \Rightarrow A_2(3, 10)$, $B_2(-3, -8)$.

2. a) $V(t) = 2t + 5 \Rightarrow V(3) = 11 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$; b) $W_c = \frac{mv^2}{2} =$

$$= \frac{605}{2} \text{erg}.$$

3. Funcţia $f: E \subset R \to R$ este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, există şi este finită. Această limită se notează cu $f'(x_0)$ şi este derivata funcţiei f în punctul x_0. a) Fie x_0 un punct arbitrar aparţinînd mulţimii $R \setminus \{-1\}$. Atunci conform celor de mai sus rezultă:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x-2}{x+1} - \frac{x_0 - 2}{x_0 + 1}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{3(x - x_0)}{(x - x_0)(x_0 + 1)(x + 1)} = \frac{3}{(x_0 + 1)^2}.$$

Deoarece x_0 este un punct arbitrar în $R\setminus\{-1\}$, înseamnă că pe această mulţime $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$. b) $f'(x) = 10x - 2$; c) $f(x) = -\frac{2}{x^3}$.

TESTUL 170

1. Funcţia se mai scrie $f(x) = \frac{1}{2}[\ln(3x^2 - 5) - \ln(x - 2)] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{6x}{3x^2-5} - \frac{1}{x-2}\right]$ etc. Atragem atenţia cititorului că prin aplicarea proprietăţilor logaritmilor uneori se schimbă domeniul de definiţie al funcţiei, de exemplu, $f(x) = \log x^2 : R\setminus\{0\}$, iar $f_1(x) = \log x : (0, +\infty)$.

2. $f'(x) = \frac{1}{2}f(x)\cdot\left[\frac{2\cos 2x - 3\sin 3x}{\cos 3x + \sin 2x} - \operatorname{ctg} x\right]$.

3. Se notează $y = (\sqrt[4]{\operatorname{tg} x})^x \Rightarrow \ln y = x\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{4}x\ln\operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{4}[x\ln\operatorname{tg} x]' \Leftrightarrow \frac{y'}{y} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\operatorname{tg} x + x\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}\right] \Rightarrow y' = y\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{4}\left[\ln\operatorname{tg} x + \frac{x}{\sin x\cos x}\right] \Rightarrow y' = \frac{1}{4}(\sqrt[4]{\operatorname{tg} x})^x\cdot$$

$$\cdot\left[\ln\operatorname{tg} x + \frac{2x}{\sin 2x}\right].$$

7. $f'(x) = 5\operatorname{tg}^4(\operatorname{tg} x^2) = 5\cdot\operatorname{tg}^4(\operatorname{tg} x^2)\cdot 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 x^2}$ etc.

8. $f'(x) = -8(3x+1)\cdot\cos(3x^2+2x)\cdot\sin(3x^2+2x)] : \cos^3[\sin(3x^2+2x)]$.

TESTUL 171

1. a) Funcţia se mai scrie

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 \text{ pentru } x\in(-\infty, -1]\cup[1, +\infty) \\ 1-x^2 \text{ pentru } x\in(-1, 1).\end{cases}$$

Problema derivabilităţii funcţiei se pune în punctele $x=-1$ şi $x=1$.

Se ştie că o funcţie $f: E\subset R\to R$, este derivabilă în x_0 ($x_0\in E$) atunci şi numai atunci cînd derivatele laterale în acest punct există şi sînt egale. Aşadar, pentru a studia derivabilitatea funcţiei în punctele -1 şi 1 se calculează derivatele laterale în aceste puncte şi se compară. Deoarece:

$$f_s'(x_0)=\lim_{x\nearrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ şi } f_d'(x_0)=\lim_{x\searrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

se obţine:

$$f_s'(-1)=\lim_{x\nearrow -1}\frac{x^2-1-0}{x+1}=-2 \text{ şi}$$

$$f_d'(-1)=\lim_{x\searrow -1}\frac{1-x^2-0}{x+1}=2.$$

Cum $f_s'(-1)\neq f_d'(-1)$ rezultă că funcţia nu este derivabilă în punctul de abscisă $x=-1$. Se calculează asemănător $f_d'(1)=2$ şi $f_s'(1)=-2$.

Observaţia 1. Punctele de coordonate $(-1, 0)$ şi $(1, 0)$ sînt puncte unghiulare, ale graficului funcţiei $f(x)$.

Observaţie 2. Dacă o funcţie f este derivabilă pe mulţimea $E\setminus\{x_0\}$ şi dacă derivata sa f' are limită (finită sau infinită) în punctul x_0, atunci $f'(x_0)$ există şi $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

b) Pornind de la această observaţie pentru studiul derivabilităţii funcţiei de la punctul 1.b, se poate proceda astfel: se calculează derivata funcţiei

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x \text{ dacă } x\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ -\sin x \text{ dacă } x\in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

În continuare se calculează:

$$f'_s\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{4}} f'(x)=\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{4}} \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ și } f'_d\left(\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\lim_{x\searrow\frac{\pi}{4}} f'(x)=\lim_{x\searrow\frac{\pi}{4}} (-\sin x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rezultă că funcția $f(x)$ este derivabilă pe mulțimea

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}, \text{ iar punctul } A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

este un punct unghiular al graficului acestei funcții.

2. Dacă funcția f este derivabilă în $x=0 \Rightarrow f$ continuă în $x=0 \Rightarrow l_s(0)=l_d(0)=f(0) \Rightarrow \beta=2$. Punînd condiția de derivabilitate, adică $f'_s(0)=f'_d(0) \Rightarrow \alpha=2$.

3. Se impun condițiile: $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=\ln 14. \end{cases}$

4. a) adevărată. b) falsă. c) falsă. d) adevărată. **5.** Dacă $f'_s(x_0)\neq f'_d(x_0)$ și cel puțin o derivată laterală este finită, atunci punctul $(x_0, f(x_0))$ este un punct unghiular al graficului funcției, iar dacă $f'_s(x_0)=\pm\infty$ și $f'_d(x_0)=\mp\infty$, punctul $(x_0, f(x_0))$ este un punct de întoarcere al graficului funcției $f(x)$.

TESTUL 172

1. $f^{(n)}(x)=e^x$. **2.** $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **3.** $f^{(n)}(x)=$ $=2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **4.** $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+$ $+1)(1+x)^{\alpha-n}$. **5.** $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. **6.** $f^{(n)}(x)=$ $=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$. **7.** $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. **8.** $f^{(n)}(x)=$ $=(-1)^n\dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

TESTUL 173

1. Sîntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$. **2.** Este cazul $\frac{\infty}{\infty}$ și se aplică de trei ori regula lui *l'Hospital* obținîndu-se limita ∞. **3.** 0. **4.** Este cazul 0^0 și se notează $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} x \ln x =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow \ln \lim_{x\to 0} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1.$$

5. Se procedează ca la exercițiul nr. 4, obținîndu-se aceeași limită. **6.** Este cazul $\infty - \infty$ și se procedează astfel:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{\sin x \ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}\sin x + \cos x \cdot \ln(1+x)}$$ etc. **7.** 0. **8.** $-\frac{1}{2}$.

TESTUL 174

1. a) Funcția este strict crescătoare pe intervalul $[0, 2]$ și atunci admite un minim egal cu 1 în punctul $x = 0$, și un maxim egal cu 7 în punctul $x = 2$. Dar punctele $x = 0$ și $x = 2$ nu sînt interioare intervalului $(0, 2)$ deci teorema lui *Fermat* nu este aplicabilă. Într-adevăr, avem $f'(0) = 6$ și $f'(2) = 3$. b) În punctul de abscisă $x = 0$, teorema lui Fermat este adevărată, iar în punctele de coordonate $(-1; 0)$, $(1; 0)$ funcția nu este derivabilă. **2.** Ținînd seama de interpretarea geometrică a teoremei lui *Rolle* rezultă că problema cere verificarea condițiilor teoremei lui *Rolle*. Adică:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ f \text{ continuă pe } [a, b] \\ 2.\ f \text{ derivabilă pe } (a, b) \\ 3.\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists)\, \xi \in (a, b) \text{ astfel ca } f'(\xi) = 0.$$

a) Funcția f este continuă în intervalul $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1)$, dar nu este derivabilă în punctul $x = 0$. Deci nu există nici un punct $\xi \in (-1, 1)$ astfel ca $f'(\xi) = 0$.

b) Funcția

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ dacă } x \in [-1, 0] \\ e^{x} \text{ dacă } x \in (0, 1], \end{cases}$$ nu este derivabilă în $x = 0$.

c) Funcția $f(x) = e^{x^2}$ satisface condițiile teoremei lui *Rolle*; deci există un punct $\xi \in (-1, 1)$ astfel ca $f'(\xi) = 0$.

3. Dacă în teorema lui *Rolle* avem $f(a) = f(b) = 0$ rezultă că între două rădăcini ale funcției există cel puțin o rădăcină a derivatei. Ecuația $f(x) = 0$ admite rădăcinile $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ și $x_5 = 8$. În aceste condiții există patru rădăcini reale ale ecuației:

$$f'(\xi) = 0, \ \xi_1 \in (-2, -1), \ \xi_2 \in (-1, 3), \ \xi_3 \in (3, 4), \ \xi_4 \in (4, 8).$$

TESTUL 175

1. a) Fie funcția $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} \dots + a_{n-1}x + a_n$, funcție continuă pe intervalul $[0, 1]$ și derivabilă pe $(0, 1)$. Pentru ca în intervalul $(0, 1)$ să existe cel puțin o rădăcină a ecuației $f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$ trebuie ca $f(0) = f(1)$ adică $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 0$.

b) Ecuația admite o rădăcină în intervalul $(-1, 0)$ dacă $f(x)$ îndeplinește condițiile teoremei lui *Rolle*, adică $f(-1) = f(0)$. Rezultă că $\sum_{i=0}^{n} a_i(-1)^{n-i} = 0$.

2. Problema continuității se pune în punctul $x = 0$ deci $l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow n = 4$. Deci pentru $n = 4$, funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + 4 \text{ pentru } x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4 \text{ pentru } x \in (0, 1] \end{cases}$$

trebuie să fie derivabilă pe intervalul $(1, 1)$. Din condiția $f_s'(0) = f_d'(0)$ rezultă $m = 4$ și cu acestea funcția devine:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 \text{ pentru } x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4 \text{ pentru } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Din condiția $f(-1) = f(1)$ rezultă $p = -7$. Așadar, funcția care satisface condițiile teoremei lui *Rolle* este:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{pentru } x \in (-1, 0] \\ -7x^2 + 4x + 4 & \text{pentru } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

3. Interpretarea geometrică a teoremei lui *Lagrange* este următoarea: Dacă graficul funcției admite tangentă în fiecare punct, există cel puțin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremitățile) în care tangenta este paralelă cu coarda care unește extremitățile.

În cazul de față, f este continuă pe intervalul $[-2, 1]$ și este derivabilă în fiecare punct interior al său. Deci există un punct $\xi \in (-2, 1)$ astfel încît:

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{0 - 6}{3} = 1 - 3\xi^2 \Rightarrow \xi = \pm 1.$$

Deci $\xi = -1$ fiindcă $\xi \in (-2, 1)$. Așadar, în punctul $C(-1, 0)$ graficul funcției admite tangentă paralelă la coarda AB.

4. a) Se observă că $F(b) = F(a) = 0$. Condițiile teoremei lui *Rolle* sînt îndeplinite. b) Există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $F'(c) = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} 1 & f'(c) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ adică } f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

care este formula creșterilor finite. Geometric $F(c)$ este dublul ariei triunghiului AMB, unde M este un punct pe arcul AB.

TESTUL 176

1. Se aplică formula creșterilor finite funcției $f(x) = \ln x$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi); \quad \xi \in (a, b) \text{ și rezultă:}$$

$$\ln a - \ln b = (a - b) \cdot \frac{1}{\xi} \Rightarrow \xi = \frac{b - a}{\ln \frac{b}{a}}.$$ Problema revine

la a arăta că $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln \frac{b}{a}} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{\frac{b}{a} - 1}{\ln \frac{b}{a}} <$

$< \frac{1 + \frac{b}{a}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{y} < \frac{y-1}{\ln y} < \frac{y+1}{2}$ cu $y > 1$, unde s-a notat $\frac{b}{a} = y$.

2. a) Se aplică formula creșterilor finite, funcției $f(x) = \ln x$ pe intervalul $[1, x+1]$ și se obține:

$$\frac{\ln(x+1) - \ln 1}{x+1-1} = f'(\xi),\ \xi \in (1, x+1) \Rightarrow \ln(x+1) = \frac{x}{\xi}.$$

Dar $\frac{x}{\xi} < x$ și $\frac{x}{x+1} < \frac{x}{\xi} \Rightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$.

b) Pe intervalul $[x, x+1]$, se aplică teorema lui *Lagrange* funcției $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$ și se ține seama că $f'(x) > 0$.

c) Funcția $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}$ are derivata $f'(x) > 0$.

d) Pe intervalul $[a, b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se aplică teorema lui *Lagrange* funcției $f(x) = \text{ctg}\, x$.

TESTUL 177

1. a) Se consideră funcția $f(x) = \cos^2 x - \frac{\cos 2x}{2};\ x \in R$

Din $f'(x) = 0$ rezultă $\cos^2 x - \frac{\cos 2x}{2} = c$ și se determină constanta $c = \frac{1}{2}$, luînd $x = 0$. Deci $\cos^2 x - \frac{\cos 2x}{2} =$ $= \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

b) Derivata funcției $f(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2 \operatorname{arctg} x$ este zero pentru orice $x > 0$; avem $\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2 \operatorname{arctg} x = C$, și se determină constanta C, considerînd $x = 1$. c) Analog punctului precedent se obține fără dificultate formula. **2.** Se procedează ca la punctul 1. b) **3.** a) Funcția $f(x)$ este derivabilă pe R și $f'(x) = 3x(x - 3)(x + 2)$. Monotonia este studiată în tabelul de mai jos:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\frac{161}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
		descrescătoare	minim	crescătoare	maxim	descrescătoare	minim	crescătoare	

b) Monotonia funcției este studiată în tabelul de mai jos:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{4 + 3\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	$\frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	1
		crescătoare	maxim	descrescătoare	minim	crescătoare	

TESTUL 178

Teorema lui *Cauchy*:

Fie funcțiile $f: I \to R$ și $g: I \to R$, unde $I \subset R$, iar a și b $(a < b)$ sînt puncte din I. Dacă:

i_1) funcțiile f și g sînt continue pe $[a, b]$
i_2) funcțiile f și g sînt derivabile pe (a, b)
i_3) $g'(x) \neq 0$ $(\forall)$ $x \in (a, b)$. $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1) \ g(a) \neq g(b) \\ c_2) \ \text{există } \xi \in (a, b) \text{ astfel ca: } \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \end{cases}$$

1. a) Se verifică ușor că funcțiile f și g satisfac condițiile $i_1) - i_3)$. pe intervalul $[0, x]$. b) Aplicînd formula rezultă:

$$\frac{(x+1)\ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x} = \frac{1+\ln(1+c)}{\frac{1}{1+c^2}}; \ c \in (0, x). \text{ Dar } \frac{f'(c)}{g'(c)} =$$

$$= (1+c^2)[1+\ln(1+c)] > 1 \Rightarrow \frac{(x+1)\ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} < \ln(1+x).$$

2. Aplicînd formula rezultă $c = \frac{e}{e-1}$. **3.** Este evident că sînt îndeplinite condițiile teoremei lui *Cauchy*. Atunci $(\exists)\ \xi \in (a, b)$ astfel ca:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h(b) - h(a) - \frac{b-a}{1!}h'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}h''(a)}{-(b-a)^3} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

de unde rezultă în final că:

$$h(b) = h(a) + \frac{b-a}{1!}h'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}h''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}h'''(\xi).$$

În general dacă funcția h este de n ori derivabilă într-o vecinătate V a punctului $a \in I$, atunci pentru orice $x \in I$ funcției $h(x)$ i se atașează polinomul de gradul n, $T_n(x)$ unde:

$$T_n(x) = h(a) + \frac{x-a}{1!}h'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}h^{(n)}(a)$$

numit polinomul lui *Taylor* de gradul n atașat funcției h în punctul a.

TESTUL 179

1. Se consideră funcția $f(x) = \operatorname{arctg} x$ și cum $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$, rezultă că

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \Rightarrow f(x+h) - f(x) \approx \frac{h}{1+x^2}.$$

Se consideră $x = 1$ și $h = 0,1 \Rightarrow \operatorname{arctg} 1,1 - \operatorname{arctg} 1 \approx \frac{0,1}{1+1} = 0,05 \Rightarrow \operatorname{arctg} 1,1 \approx \frac{\pi}{4} + 0,5 \approx 0,835.$

2. Diferențiala funcției $f(x) = \sqrt[3]{x}$ este $\mathrm{d}f(x) = \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x^2}}$, deci $f(x+h) - f(x) \approx \frac{h}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Pentru a calcula $\sqrt[3]{123}$ se observă că $\sqrt[3]{125} = 5$. Se consideră $x = 125$ și $h = -2 \Rightarrow x + h = 123$. Deci

$$\sqrt[3]{123} - \sqrt[3]{125} \approx \frac{-2}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{-2}{75} \approx -0,0267 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{123} \approx 4,9733.$$

3. Se ia $x = 32$ și $h = 1 \Rightarrow \sqrt[5]{33} \approx 2 + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = 2 + \frac{1}{80} = 2,0125$. **4.** Se ia $x = \frac{\pi}{6}$ și $h = \frac{\pi}{180} \Rightarrow \cos 31 \approx 0,851$. **5.** $\sin 18° \approx 0,309017$. **6.** $\sqrt[3]{30} \approx 3,11$.

TESTUL 180

Pentru determinarea domeniilor de definiție se impun condițiile:

1. $x^2 - 5x + 4 > 0$. **2.** $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 9 - x^2 > 0. \end{cases}$

3. Funcția $\ln|x|$ este definită pentru $x \in R \setminus \{0\}$, $\ln|x| + 1 \neq 0$ pentru $x \neq \pm\frac{1}{e}$ și $e^{\frac{1}{x}}$ definită pe $R \setminus \{0\}$.

În final rezultă $R \setminus \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}$ sau $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{1}{e}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

4. $\begin{cases} \lg(1+x) \neq 0 \\ 1+x > 0 \\ x-2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [2, +\infty)$. 5. $\begin{cases} \arccos(\lg x) \geqslant 0 \\ -1 \leqslant \lg x \leqslant 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \arcsin(\log_{\frac{1}{2}} x) \geqslant 0 \\ -1 \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 1 \\ x > 0. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x^2 + x \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x^2 + x + 1 \leqslant 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 4 - x^2 > 0. \end{cases}$

TESTUL 181

1. Cum $f: R \setminus \{-1\}$ se calculează $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x)$, $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x)$ și rezultă asimptota verticală $x = -1$. Deoarece $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, funcția admite asimptota orizontală $y = 1$. 2. Este o funcție rațională în care gradul numărătorului este cu o unitate mai mare decît gradul numitorului. Deci, se caută asimptotă oblică de forma $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ și $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = 3$. Deci graficul funcției are asimptotă oblică dreapta $y = 3x + 3$ și asimptotă verticală $x = 1$. 3. Funcția este definită pe R, deci nu poate fi vorba de asimptotă verticală, și fiindcă $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, rezultă că graficul funcției are asimptotă orizontală axa Ox, $(y = 0)$. 4. Funcția este definită pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ și cum $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, rezultă că pentru $x > 0$, graficul admite asimptotă verticală axa $Oy (x = 0)$. Deoarece

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 1 \text{ și } n = \lim_{x \to \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1;$$

graficul admite asimptotă oblică dreapta $y = x + 1$.

5. Funcția este definită pe

$$R \setminus \{0\}, \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \sin\frac{1}{x} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \to +\infty \\ -1 & \text{dacă } x \to -\infty \end{cases}.$$

Deci sînt două asimptote orizontale $y = 1$. (pentru ramura $+\infty$) și $y = -1$ pentru ramura $-\infty$. **6.** Graficul funcției admite asimptota oblică $y = x$ pentru ramura $+\infty$ și $y = -x$ pentru ramura $-\infty$. **7.** Funcția este definită pe R și are asimptotă oblică dreapta $y = x - \frac{1}{3}$. **8.** Funcția se mai scrie sub forma

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x-2}} & \text{dacă } x \in [0, 2) \cup (2, \infty) \\ -xe^{\frac{1}{x-2}} & \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Fiindcă $\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, rezultă că dreapta $x = 2$ este asimptotă verticală pentru $x > 2$. Graficul funcției admite două asimptote oblice: $y = x + 1$ și $y = -x - 1$.

9. Dreapta $x = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ este asimptotă verticală pentru ramura situată la dreapta (acestei drepte), iar $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ este

asimptotă verticală pentru ramura situată la stînga acestei drepte. **10.** Asimptotă oblică, dreapta $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2e}$ și asimptotă verticală $x = \frac{1}{3e}$ pentru $x > \frac{1}{3e}$. Trebuie reținut că funcțiile raționale $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_{p-1}x + b_p}$ admit: — asimptote verticale în punctele în care se anulează numitorul;

— asimptotă oblică dacă $n = p + 1$;

— asimptotă orizontală $y = \frac{a_0}{b_0}$ dacă $n = p$;

— asimptotă orizontală $y = 0$ dacă $n < p$.

11. $x = 0$; $y = 1$ (la ramura $+\infty$); $y = 1$ (la ramura $-\infty$). **12.** $x = 1$; $x = 4$.

TESTUL 182

1. Se calculează $f''(x) = \frac{2(x+4)}{(x+1)^4} \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$. Se studiază semnul lui $f''(x)$ și rezultă că pentru $x \in (-\infty, -4)$ graficul funcției este concav, iar pentru $x \in (-4, -1) \cup (-1, \infty)$ graficul funcției este convex. Punctul $A\left(-4, -14\frac{2}{9}\right)$ este punct de inflexiune. **2.** $f''(x) = 12x(x-1)$. Pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ graficul funcției este convex, iar pentru $x \in (0, 1)$ graficul funcției este concav. Punctele $A(0, 2)$ și $B(1, 1)$ sînt puncte de inflexiune.

3. $f'(x) = \frac{3x - 5}{3\sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}}$;

$$f''(x) = \frac{-32}{9(x+1)(x-3)\sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}}.$$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty \mid -\infty$		$-$		0	$+$	$+\infty \mid +\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{3}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$ convexă	|		$+$ convexă				|	$-$ concavă	

4. $f''(x) = \begin{cases} -(x+1)\,e^{x} & \text{dacă } x \in (-\infty,\ 0] \\ (3-x)\,e^{-x} & \text{dacă } x \in (0,\ 1) \\ (x-3)\,e^{-x} & \text{dacă } x \in [1,\ \infty). \end{cases}$

TESTUL 183

1. a) $x \in R \setminus \{-1\}$ adică, $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. b) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, deci graficul va trece prin origine. c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală a graficului. d) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in R \setminus \{-1\}$, deci funcția este crescătoare pe tot domeniul său de definiție și nu admite nici un punct de extrem. e) $f''(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$, deci graficul funcției nu are nici un punct de inflexiune. f) După cum s-a văzut la punctul c) graficul admite asimptotă orizontală dreaptă $y = 1$. Pentru a determina asimptota verticală se calculează $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$. g) Tabloul de variație este:

x	$-\infty$			-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	|	$+$			
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\nearrow$	$\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

b) Graficul este trasat în figura 59. **3.** Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$		$-$	|	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0
$f''(x)$		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	

Graficul este trasat în figura 60. **4.** Graficul admite asimptota oblică dreaptă $y = x - 1$, iar asimptota verticală dreapta $x = -1$. Tabloul de variație este:

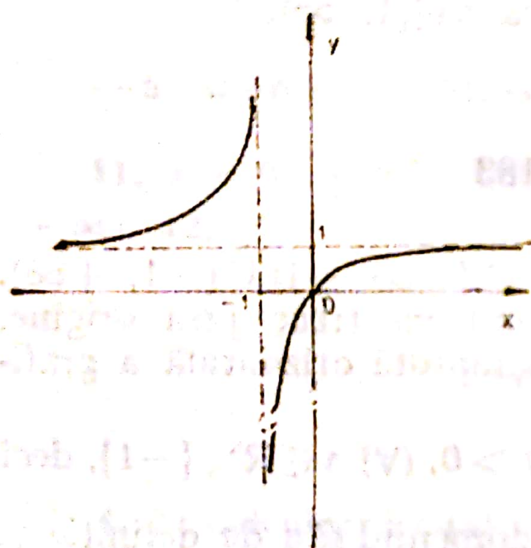


Fig. 59

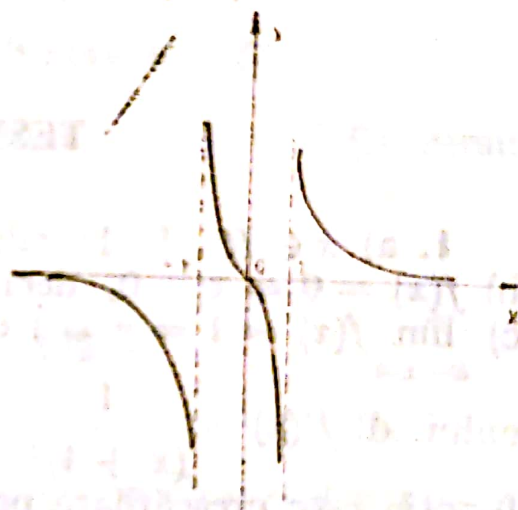


Fig. 60

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		0		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$			0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-2(\sqrt{2}+1)$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1	↘	$2(\sqrt{2}-1)$	↗	$+\infty$
$f''(x)$			$-$		|		$+$				

Graficul este trasat în figura 61.

6. Pentru aflarea domeniului de definiție se pun condițiile:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, \ -2) \cup (-2, \ -1] \cup [1, \ +\infty).$$

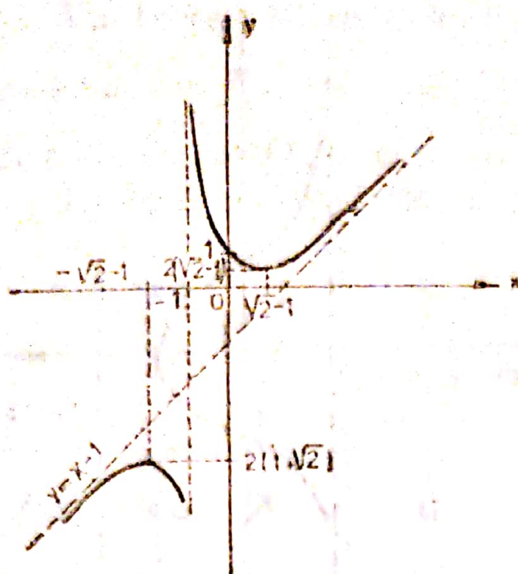


Fig. 61

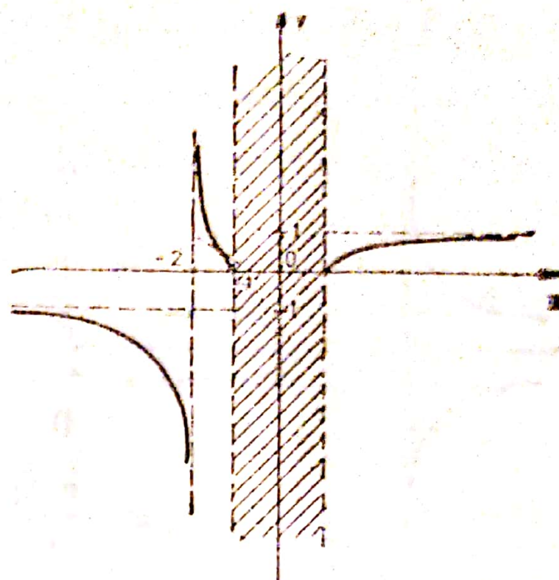


Fig. 62

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0		0	↗	1

Figura 62 redă graficul acestei funcții.

TESTUL 184

1. Se reprezintă grafic $f(x) = +\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$, cealaltă ramură a graficului construindu-se prin simetrie față de axa Ox. Tabloul de variație este următorul:

x	$-\infty$		-2	0	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$		0	↗	1

Graficul este trasat în figura 63. **2.** Graficul este trasat în figura 64.

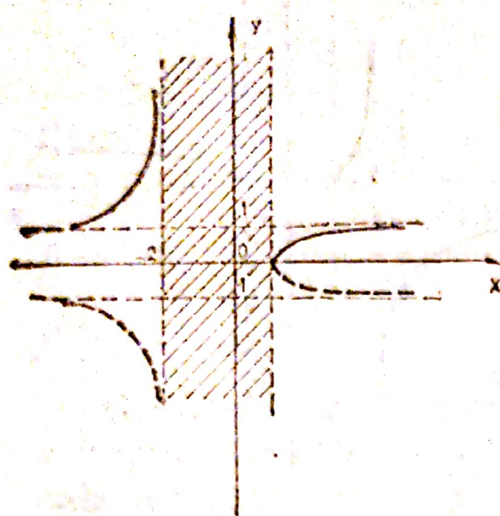


Fig. 63

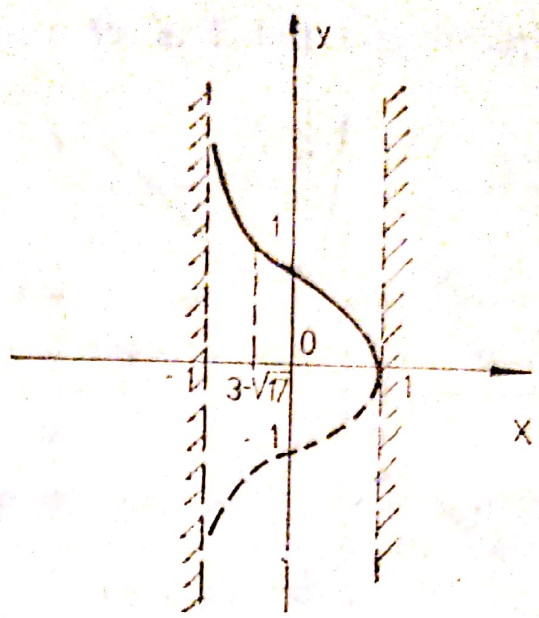


Fig. 64

TESTUL 185

1. Tabloul de variație este următorul:

x	$-\infty$		0			2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		α		$-\frac{1+\sqrt{8}}{2}$		-1		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$					$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1+\sqrt{8}}{2}\right)$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0 inflexiune	$-$						$-$	0 inflexiune	$+$	

TESTUL 186

1. Funcția este definită pe R, derivata funcției este

$$f'(x) = \frac{3x - 1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}.$$

Se observă că derivata funcției este definită pe $R \setminus \{0, 1\}$.

Va trebui să se calculeze $\lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = +\infty$. Rezultă că punctul de coordonate (1, 0) este un punct de întoarcere al graficului.

Tabloul de variație al funcției este:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ + ‖ $+\infty$	$+$	0		$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	0	↗	$+\infty$

Graficul funcției este trasat în figura 65.

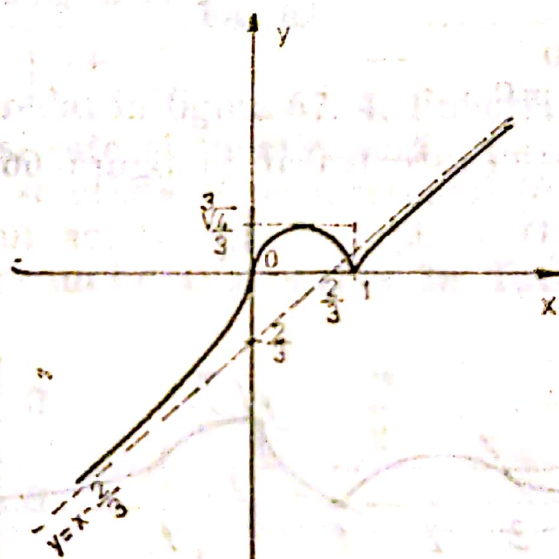


Fig. 65

TESTUL 187

2. Explicitînd modulele funcției se mai scrie:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)e^{x} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ (x+1)e^{x} & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ (x+1)e^{-x} & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Funcția este continuă pe R. Va trebui să se studieze derivabilitatea în punctele $x = -1$ și $x = 0$. Avem:

$$f'(x) = \begin{cases} -(x+2)e^{x} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ (x+2)e^{x} & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ -x\,e^{-x} & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

iar $f'_s(-1) = -\frac{1}{e}$, $f'_d(-1) = \frac{1}{e}$, $f'_s(0) = 2$, $f'_d(0) = 0$, deci funcția nu este derivabilă în punctele de abscisă $x = -1$ și $x = 0$. Fiindcă în aceste puncte derivatele laterale sînt diferite și finite rezultă că punctele de coordonate $(0; 1)$ și $(1; 0)$ sînt puncte unghiulare ale graficului.

Tabloul de variație este următorul:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-\ -$	$-\frac{1}{e} \mid \frac{1}{e}$		$2 \mid 0$		$-$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e^3}$	$\nearrow$	$e^{-2}_{(M)}$	$\searrow$	0 p. unghiular	$\nearrow$	1 p. unghiular	$\searrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$+$	0 p. inflex.	$-$			|	$+$	|	$-$	0 p. inflex.	$+$	

Graficul funcției este trasat în figura 66.

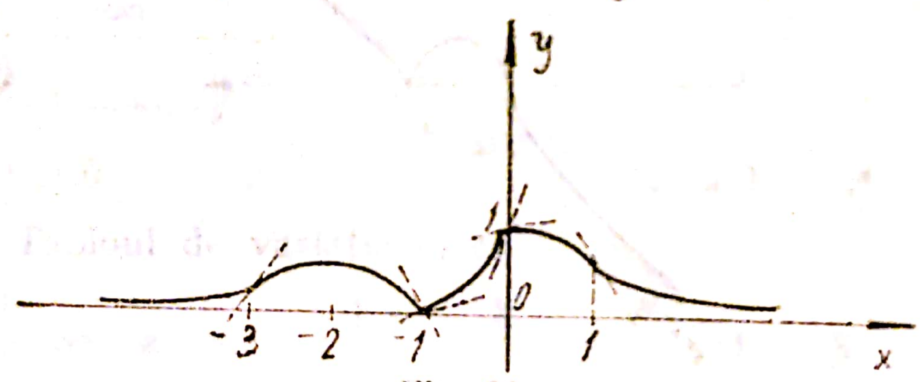


Fig. 66

TESTUL 188

1. Deoarece $|\cos 2x| \leqslant 1$ rezultă că domeniul de definiție este $x \in R \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in Z$. Funcția fiind periodică, de perioadă 2π este suficient să se alcătuiască tabloul de variație pe intervalul $[0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	0
$f'(x)$	$\ln 2$ $\searrow$	0 $\searrow$	$-\infty$ | ∞ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\ln 2$ $\searrow$		$-\infty$ | ∞ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\ln 2$
$f''(x)$		$-$	|		$-$		|	$-$	

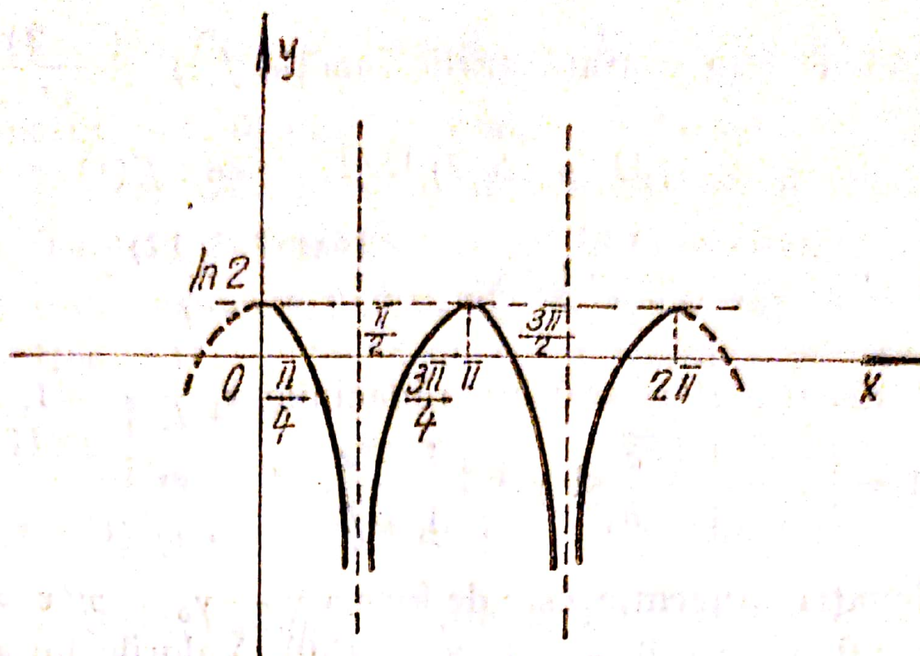


Fig. 67

Graficul este redat în figura 67. **4.** Funcția este periodică, de perioadă 2π și este și funcție pară, $f(-x) = f(x)$. Este deci suficient să se studieze pe intervalul $[0, \pi]$ și se construiește simetricul acestui grafic față de Oy, obținîndu-se graficul funcției pe un interval egal cu 2π. Tabloul de variație este:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0		$-$		0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

Graficul are două puncte de inflexiune situate în intervalele

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ și } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

TESTUL 189

1. a) Asimptota oblică este dreapta $y = mx + n$ unde $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, iar $n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$. Rezultă $a = 2$, $d = 0$, $e = -4$, $b = 0$, $c = 0$.

b) Trebuie reprezentată grafic funcția $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$;

$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$; $f'(x) =$

$$= \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}; \ f''(x) = \frac{16x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$$

2. a) Ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = b - 1$, $x_2 = -b + 1 \Rightarrow y_1 = \frac{1 - a}{1 - b}$ și $y_2 = \frac{1 + a}{1 + b}$.

b) Ecuația tangentei este de forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ unde $x_0 = 0$, $y_0 = f(0) = -1$, $m = f'(0)$. Valorile lui a și b sînt date de sistemul:

$$\begin{cases} 1 - ab = 0 \\ 2(a - b) = b^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow (1, 1); (-1, -1); \left(-\frac{1}{2}, 2\right).$$

c) Domeniul de definiție $R \setminus \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$. Punct de maxim $(-2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$; punct de minim $(2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$. Asimptote: $y = 1$, $x = \pm 2\sqrt{2}$.

TESTUL 190

1. a) Din condițiile $\begin{cases} f(0) = \sqrt[3]{-3} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = -\frac{1}{3} \end{cases}$ rezultă

$a = 1$, $b = -1$, $c = -3$.

b) În acest caz, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - 5x - 3}$; $x \in R$,

$f'(x) = \frac{3x - 5}{3\sqrt[3]{(x + 1)(x - 3)^2}}$. Se observă că $f' : R \setminus \{-1, 3\}$

și $f'_s(-1) = \lim\limits_{x\nearrow -1} f'(x) = +\infty$ și $f'_d(-1) = \lim\limits_{x\searrow -1} f'(x) = -\infty$, deci punctul (—1, 0) este un punct de întoarcere; $f'_s(3) = f'_d(3) = +\infty$, deci punctul (3, 0) este un punct de inflexiune. Tabloul de variație este dat în figura 68, iar graficul funcției este trasat în figura 69. **2.** a) Trebuie ca expresia $2mx^2 + 2(m-1)x + 2m$ să fie strict pozitivă, pentru orice x real. Deci $\begin{cases}\Delta < 0\\ m > 0\end{cases} \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. b) $f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \ln(x^2+1)$ și $e^{\ln x} = x$, deci ecuația este $\ln(x^2+1) + \ln\frac{x}{2} = 0$ și nu admite soluție. c) Funcția $f(x) = \ln(1+x^2)$

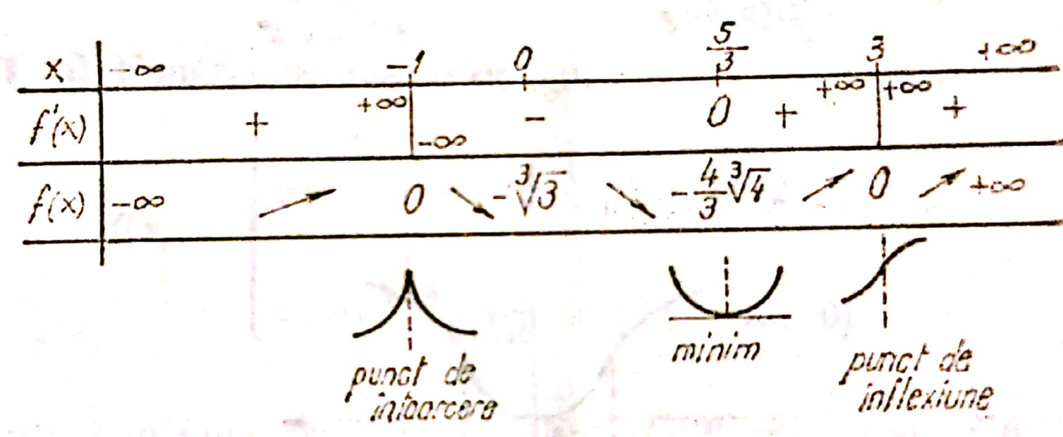


Fig. 68

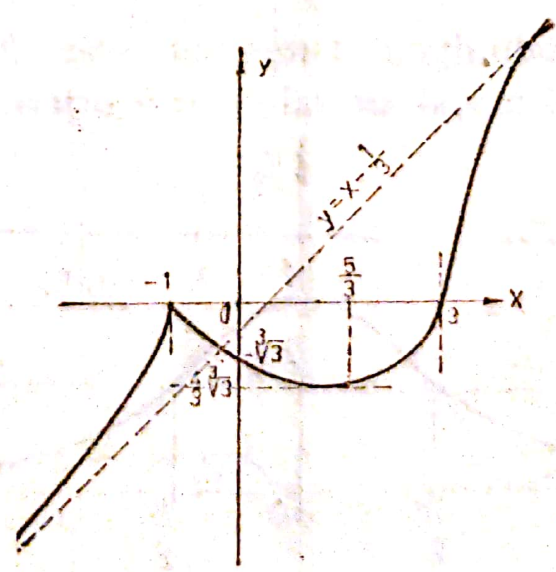


Fig. 69

are tabloul de variație redat în figura 70, iar graficul în figura 71. **3.** Graficul funcției $f_2(x) = e^{-x^2}$ este trasat în figura 72, iar al funcției $f_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$ în figura 73.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↘	0	↗	$\ln 2$	↗	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	

punct de inflexiune — minim — punct de inflexiune

Fig. 70

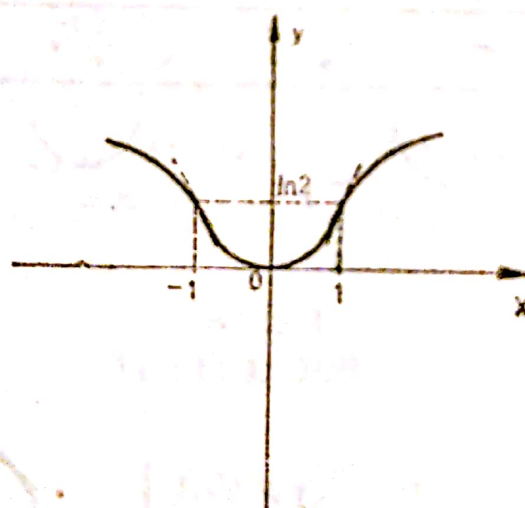


Fig. 71

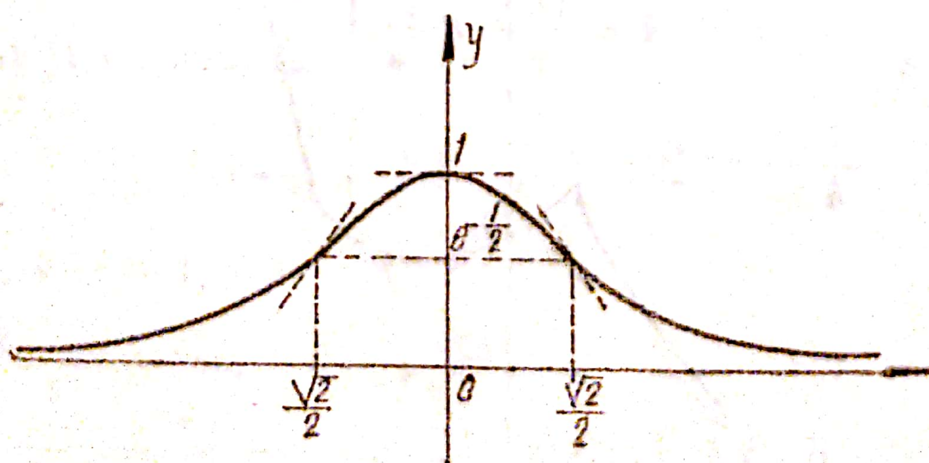


Fig. 72

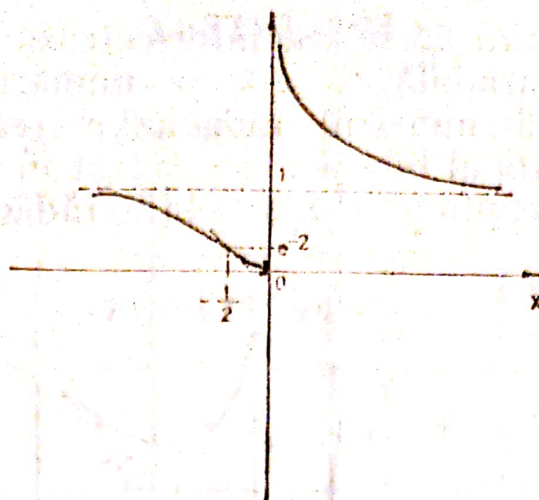


Fig. 73

TESTUL 191

1. a) Funcția se mai scrie

$$f(x)=\begin{cases} x\,e^{\frac{1}{x-2}} \text{ dacă } x\in[0,\,2)\cup(2,\,+\infty)\\ -x\,e^{\frac{1}{x-2}} \text{ dacă } x\in(-\infty,\;0)\end{cases}$$

și este continuă pe $R\setminus\{2\}$. Cum $f'_d(0)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ și $f'_s(0)=$ $=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ rezultă că funcția nu este derivabilă în $x=0$ și punctul $(0,\ 0)$ este un punct unghiular al graficului. b) Tabloul de variație este redat în figura 74, iar graficul

x	$-\infty$		0		1		$\frac{8}{5}$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+$	0	$-$			0 | $-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘			0 | $+\infty$	↘	$4\sqrt{e}$	↗	$+\infty$
			punct unghiular		maxim		punct de inflexiune				minim		

Fig. 74

este trasat în figura 75. c) Se intersectează graficul funcției cu o dreaptă variabilă $y = \lambda$ și numărul punctelor de intersecție indică numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = \lambda$. **2.** Graficul funcției este trasat în figura 76 și prin intersecția cu dreapta $y = \lambda$ se obțin rădăcinile.

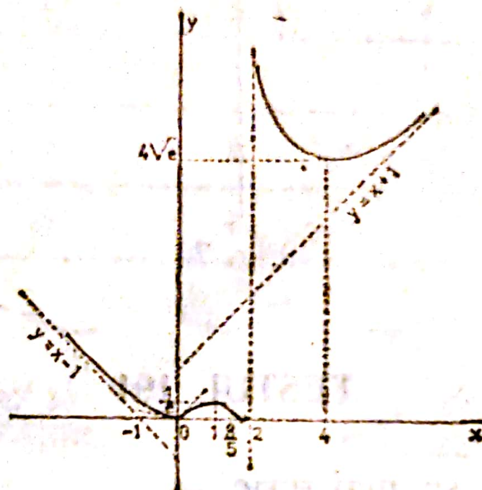


Fig. 75

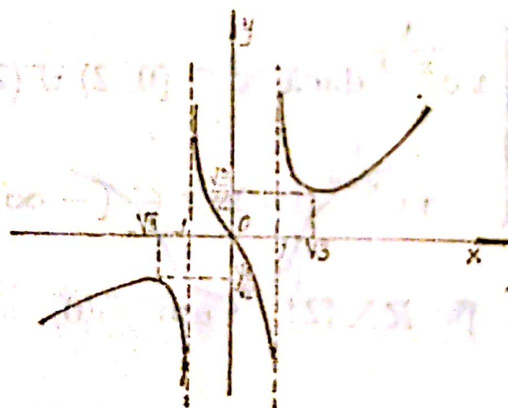


Fig. 76

TESTUL 192

1. Pentru a găsi extremele locale și absolute (deci valorile maxime și minime) ale funcției $f: [a, b] \to R$, se procedează astfel:

—se află rădăcinile derivatei f' a lui f;

—se cercetează dacă aceste rădăcini sînt puncte de extrem;

—se calculează valorile lui f în punctele de extrem;

—se compară valorile extreme ale lui f și valorile calculate în a și b.

2. Pentru $x_1 = \frac{1}{6}(5 - \sqrt{7})$, $V(x_1) = \frac{\pi}{27}(5 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})$.

TESTUL 193

1. Se alcătuieşte tabelul:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	Discuția
$f(x)$ / α		$\alpha-19$	$\alpha+13$	$\alpha+8$		Numărul şi poziția rădăcinilor reale
$\alpha\in(-\infty,-13)$	+	−	−	−	+	$x_1\in(-\infty,\ -1)$ şi $x_2\in(2,\ +\infty)$
$\alpha=-13$	+	−	0	−	+	$x_1=x_2=1$ $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{40}}{3}$
$\alpha\in(-13,\ -8)$	+	−	+	−	+	$x_1\in(-\infty,\ -1)$, $x_2\in(-1,\ 1)$ $x_3\in(1,\ 2)$; $x_4\in(2,\ +\infty)$
$\alpha=-8$	+	−	+	0	+	$x_1=x_2=2$ $x_3\in(-\infty,\ -1)$ $x_4\in(-1,\ 1)$
$\alpha\in(-8,\ 19)$	+	−	+	+	+	$x_1\in(-\infty,\ -1)$ $x_2\in(-1,\ 1)$
$\alpha=19$	+	0	+	+	+	$x_1=x_2=-1$
$\alpha\in(19,\ +\infty)$	+	+	+	+	+	Ecuația nu are rădăcini reale

2. Fie funcția $f(x)=2\alpha x^3-x^2-4\alpha$, $f'(x)=6\alpha x^2+2x$ pentru $\alpha\neq 0$, $f'(x)=0\Rightarrow x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{6\alpha}$. Pentru $\alpha<0$ şirul lui *Rolle* este $+\infty$; $-4m$, $\frac{-108\alpha^3+1}{27\alpha^2}$; $-\infty$.

Pentru $\alpha>0$ şirul lui *Rolle* este $-\infty$, $\frac{108\alpha^3+1}{27\alpha^2}$, -4α, $+\infty$.

11. Se poate scrie $\lambda = x\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$ și se reprezintă grafic funcția $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$, apoi se intersectează graficul acestei funcții cu dreapta variabilă $y = \lambda$. Pentru $\lambda \in (-\infty, 0)$, ecuația are o rădăcină reală $x_1 \in (-\infty, 0)$; Pentru $\lambda = 0$, ecuația are două rădăcini reale: $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$; Pentru $\lambda \in \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ecuația era două rădăcini reale; Pentru $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ecuația are rădăcini reale $x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$; Pentru $\lambda \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 4\sqrt{2}\right)$, ecuația nu admite rădăcini reale; Pentru $\lambda = 4\sqrt{2}$, $\Rightarrow x_1 = x_2 = 4$, pentru $\lambda \in (4\sqrt{2}, +\infty)$ ecuația are două rădăcini reale $x_1 > 3$, $x_2 > 3$.

II.7. PRIMITIVE

TESTUL 194

1–5. Fiind dată o funcție: $f : I \subset R \to R$, dacă $f(I)$ nu este interval atunci funcția f nu admite primitive pe I.
Pentru explicitarea funcțiilor vezi testul 13.

6. Funcția f fiind continuă pe intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ admite primitive.

7. Întrucît $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{\pi}{2}\right) = \{1, 0, 1\}$ nu este interval, f nu admite primitive.

8. Fie funcția $f : I \subset R \to R$ scrisă sub forma: $f(x) = g(x) + h(x)$.

Dacă f și g admit primitive pe I rezultă că și h admite primitive.

În cazul de față $f(x) = g(x) + h(x)$, unde g este funcția de la exercițiul **6** iar h funcția de la exercițiul **7**.

Presupunînd că funcția f admite primitive, cum funcția g admite primitive, ar rezulta că și funcția h ar admite pri-

mitive. Cum funcția h nu admite primitive rezultă că nici funcția f nu admite primitive.

9, 10. Funcțiile fiind continue pe R rezultă că admit primitive.

TESTUL 195

Utilizînd tabloul de integrale imediate se obține.

1. $F(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x} + 15x\sqrt[15]{x^8} + C$;

2. $F(x) = 3x\sqrt[3]{x^2} + 6x\sqrt[6]{x} + 3x\sqrt[3]{x} + 12x\sqrt[12]{x^5} + C$;

3. $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3^x}{\ln 3} + \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + 3\ln(-x) + \dfrac{3}{2}x^2 + C$,

deoarece $x \in (-\infty, 0)$;

4. $F(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + \ln(x + \sqrt{x^2+4}) +$

$$+\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2} + \ln(x + \sqrt{x^2-4}) + C;$$

5. $F(x) = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{3+2x}{3-2x} + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{3} + C$;

6. Funcția f mai poate fi scrisă:

$$f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = 2 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

7. Întrucît $f(x) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right)$, rezultă

$F(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C$;

TESTUL 196

Dacă $f, g : I \subset R \to R$ sînt derivabile și admit derivate continue, atunci funcțiile fg, $f'g$ și fg' admit primitive și are loc relația:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = fg - \int g(x)\cdot f'(x)\,dx.$$

Formula de mai sus poartă numele de formula de integrare prin părți. Utilizînd această formulă se obține:

1. $$\int (3x^2 - 2x + 1) \cdot \ln x \cdot \mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3 - x^2 + x)'}_{g'} \cdot \underbrace{\ln x}_{f} \cdot$$

$$\cdot \mathrm{d}x = \underbrace{(x^3 - x^2 + x)}_{g} \cdot \underbrace{\ln x}_{f} - \int \underbrace{(x^3 - x^2 + x)}_{g} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= x\left[(x^2 - x + 1)\ln x - \frac{1}{6}(2x^2 - 3x + 6)\right] + C;$$

2. $$\int \frac{x+1}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int (x+1)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int (x +$$

$$+ 1)(e^{-x})'\,\mathrm{d}x = -(x+1)\,e^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -$$

$$- e^{-x}(x+2) + C;$$

3. $$\int (x+1) \cdot 2^x\,\mathrm{d}x = \int (x+1)\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)'\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x+1}{\ln 2}\,2^x - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2}\left[x + 1 - \frac{1}{\ln 2}\right] + C;$$

4. $$I = \int 2^x(-\cos x)'\,\mathrm{d}x = -2^x\cos x +$$

$$+ \ln 2 \int 2^x(\sin x)'\,\mathrm{d}x = -2^x\cos x + \ln 2\left[2^x \sin x -\right.$$

$$\left.- \ln 2 \int 2^x \sin x\,\mathrm{d}x\right] = -2^x\cos x + \ln 2 \cdot 2^x \cdot \sin x -$$

$-(\ln 2)^2 \cdot I$. Rezultă: $I = \dfrac{2^x(\ln 2 \cdot \sin x - \cos x)}{1 + \ln^2 2}$;

5. $$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int (2\sqrt{x})' \cdot \ln x \cdot \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x -$$

$$- 2\int \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C;$$

6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{e^x}}\,dx = \int x^2 \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)' dx = -2e^{-\frac{x}{2}} (x^2 +$
$+ 4x + 8) + C;$

7. $I = \int \sqrt{4 + x^2}\,dx = \int \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx +$
$+ \int x \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = 4 \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) +$
$+ \int x(\sqrt{4 + x^2})'\,dx = 4 \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) +$
$+ x\sqrt{4 + x^2} - \int \sqrt{4 + x^2}\,dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} x \sqrt{4 + x^2} +$
$+ 2 \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) + C;$

8. $I = \int \sqrt{4 - x^2}\,dx = \int \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx -$
$- \int x \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx = 4 \arcsin \frac{x}{2} + \int x (\sqrt{4 - x^2})'\,dx =$
$= 4 \arcsin \frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2} - \int \sqrt{4 - x^2}\,dx;\ I =$
$= \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C.$

TESTUL 197

Utilizînd tabloul de integrale imediate pentru funcții compuse se obține:

1. $\int x(x^2 - 1)^{10}\,dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^{10} \cdot (x^2 - 1)'\,dx =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 1)^{11}}{11} + C;$

2. $\int \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x - 5}\,dx = \int \frac{(x^3 - 2x^2 + x - 5)'}{x^3 - 2x^2 + x - 5}\,dx =$
$= \ln(x^3 - 2x^2 + x - 5) + C;$

3. $\int (4x+2)\,e^{x^2+x-1}\,dx = 2\int e^{x^2+x-1}(x^2+x-1)'\,dx =$

$= 2e^{x^2+x-1} + C;$

4. $\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)'}{\sqrt{16-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4} + C;$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3)'}{\sqrt{(x^3)^2-1}}\,dx =$

$= \frac{1}{3}\ln(x^3 + \sqrt{x^6-1}) + C;$

6. $\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{(2^x)'\,dx}{1+(2^x)^2} = \frac{1}{\ln 2}\,\mathrm{arctg}\,2^x + C;$

7. $\int \frac{1+\ln^4 x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \ln^4 x\cdot(\ln x)'\,dx =$

$= \ln x + \frac{1}{5}\ln^5 x + C;$

8. $\int x\sin(2+3x^2)\,dx = \frac{1}{6}\int \sin(2+3x^2)\cdot(2+$

$+3x^2)'\,dx = -\frac{1}{6}\cos(2+3x^2) + C;$

9. $\int \sin^{10} x\cos^3 x\,dx = \int \sin^{10} x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot(\sin x)'\,dx =$

$= \frac{1}{11}\sin^{11} x - \frac{1}{13}\sin^{13} x + C;$

10. $\int \frac{x+\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} +$

$+ \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\int \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx +$

$+ \int (\arcsin x)^{\frac{1}{3}}\cdot(\arcsin x)'\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} +$

$+ \frac{3}{4}\cdot\arcsin x\,\sqrt[3]{\arcsin x} + C.$

TESTUL 198

I. 1. Se face schimbarea de variabilă $x + 1 = t^3$, deci $x = \varphi(t) = t^3 - 1$, $\varphi'(t) = 3t^2$, deci rezultă $f[\varphi(t)]\varphi'(t) = (t^3 - 1)\, t \cdot 3t^2$.

2. Se face substituția $t = \ln x$; $x \in (0, +\infty)$ deci $x = \varphi(t) = e^t$ și $\varphi'(t) = e^t$. Atunci $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) = t + \frac{1}{t}$.

3. $$\int \frac{\cos x}{\sin^n x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin^n x} dx.$$

6. $$\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{e^{-x}\, dx}{e^{-x}(1 + e^x)} = \int \frac{e^{-x}\, dx}{1 + e^{-x}} = -\int \frac{(1 + e^{-x})'}{1 + e^{-x}} dx.$$

II. 2. $\varphi(t) = a \sin t$, $\varphi'(t) = a \cos t \Rightarrow f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) =$

$$= \frac{a^2 \cos^2 t}{a^4 \sin^4 t} \text{ deci } I = \frac{1}{a^2} \int \frac{\frac{\cos^4 t}{\cos^2 t}}{\sin^4 t} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg}^4 t} dt =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{(\operatorname{tg} t)'}{\operatorname{tg}^4 t} dt = -\frac{1}{3a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3 t} + C \Rightarrow I =$$

$$= -\frac{1}{3a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)} = -\frac{1}{3a_2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right]^3} + C \text{ etc.}$$

3. $\varphi(t) = \frac{2}{\sin t} \Rightarrow \varphi'(t) = -2\frac{\cos t}{\sin^2 t} \Rightarrow f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) =$

$$= \frac{\sqrt{4\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}}{\frac{8}{\sin^3 t}} \cdot \left(-\frac{2 \cos t}{\sin^2 t}\right) \text{ etc.}$$

4. În acest caz $\varphi(t) = \text{tg } t$; $\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$. În final se obține $I = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} + C$.

TESTUL 199

1. Pentru $I_n = \int x^n \cos \alpha x \, dx$, notăm: $f = x^n \Rightarrow f' = nx^{n-1}$ și $g' = \cos \alpha x \Rightarrow g = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha x$.

Deci $I_n = \frac{1}{\alpha} x^n \sin \alpha x - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \sin \alpha x \, dx$ adică

$$I_n = \frac{1}{\alpha} x^n \sin \alpha x - \frac{n}{\alpha} \cdot J_{n-1}. \qquad \text{(a)}$$

Pentru $J_n = \int x^n \sin \alpha x \, dx$ se notează $u = x^n \Rightarrow u' = nx^{n-1}$ și $v' = \sin \alpha x \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha} \cos \alpha x$ și atunci

$$J_n = -\frac{1}{\alpha} x^n \cos \alpha x + \frac{n}{\alpha} I_{n-1}. \qquad \text{(b)}$$

În relația (b) se substituie n prin $n-1$ și rezultă:

$$J_{n-1} = -\frac{1}{\alpha} x^{n-1} \cos \alpha x + \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2}. \qquad \text{(c)}$$

Înlocuind relația (c) în relația (a) se obține:

$$I_n = \frac{1}{\alpha^2} [x^{n-1}(\alpha x \sin \alpha x + n \cos \alpha x) - n(n-1) I_{n-2}].$$

Analog se obține

$$J_n = -\frac{1}{\alpha^2} [x^{n-1} (n \sin \alpha x - \alpha x \cos \alpha x) - n(n-1) J_{n-2}].$$

2. Se notează $u = \frac{1}{(a^2 + x^2)^n} \Rightarrow u' = -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$ și

$$v' = 1 \Rightarrow v = x.$$

Deci

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2na^2 \cdot I_{n+1}.$$

Deci

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1) \cdot I_n\right].$$

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$ Pentru $n = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2 + a^2} + I_1\right] =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right] + C.$$

Pentru $n = 2$:

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \cdot \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + 3I_2\right] =$$

$$= \frac{1}{4a^2}\left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{2a^2}\left(\frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)\right] + C.$$

3. $I_{n;\,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} \mathrm{d}x$. Se notează $u = \sin^{n-1} x \Rightarrow$

$$\Rightarrow u' = (n - 1) \sin^{n-2} x \cos x; \quad v' = \frac{\sin x}{\cos^m x} \Rightarrow v =$$

$$= \frac{1}{(m - 1) \cos^{m-1} x}; \quad (m \neq 1).$$

Deci

$$I_{n;\,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-2} x\, dx}{\cos^{m-2} x} =$$

$$= \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \cdot I_{n-2,\, 2-m}.$$

4. Pentru I_n se notează $u = (\arcsin x)^n \Rightarrow u' =$

$= n(\arcsin x)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ și $v' = 1 \Rightarrow v = x \Rightarrow I_n =$

$$= x(\arcsin x)^n - n\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} (\arcsin x)^{n-1}\, dx.$$

Pentru $\displaystyle\int \frac{x(\arcsin x)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ se notează $u = (\arcsin x)^{n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u' = \frac{n-1}{\sqrt{1-x^2}} (\text{arcins } x)^{n-2} \text{ și } v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2}.$$

$I_n = x(\arcsin x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$
Analog se calculează $J_n = x(\arccos x)^n + n\sqrt{1-x^2}$ $\cdot(\arccos x)^{n-1} - n(n-1)J_{n-2}.$

TESTUL 200

1. Se notează $\operatorname{arctg}\sqrt{x} = u \Rightarrow u' = \dfrac{1}{1+x}$; $v' = 1 \Rightarrow v = x$

și rezultă: $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx = x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{x}{1+x}\, dx =$

$= x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - x + \ln(1+x) + C.$

2. Se notează: $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$; $v' = x^3 \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$ şi

$$I = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} x^4 \left[\ln x - \frac{1}{4}\right] + C.$$

3., 4. Dacă $I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx$ şi $I_2 =$

$$= \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Notăm: $u = e^{ax} \Rightarrow u' = ae^{ax}$; $v' = \cos bx \Rightarrow v = \frac{1}{b} \sin bx$.

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx. \qquad (\alpha)$$

Pentru I_2 notăm: $u = e^{ax} \Rightarrow u' = ae^{ax}$ şi $v' = \sin bx \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = -\frac{1}{b} \cos bx \text{ deci } I_2 = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx +$$

$$+ \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx. \qquad (\beta)$$

Se observă că relaţiile (α) şi (β) se mai scriu:

$$(\gamma) \begin{cases} I_1 = +\frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I_2 \\ I_2 = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I_1 \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul (γ) în care necunoscutele sînt I_1 şi I_2 rezultă:

$$I_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}.$$

III. 1. $I = \left(2x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{7}{4}\right) e^{2x} + k$. 2) Pentru comparație se dă calculul integralei $\int x^3 e^{2x}\,dx$ prin metoda expusă și apoi prin părți.

Metoda I. Se scrie $\int x^3 e^{2x}\,dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\,e^{2x}$ și se derivează rezultînd: $x^3 e^{2x} = e^{2x}[2Ax^3 + 2Bx^2 + 2Cx + 2D + 3Ax^2 + 2Bx + C] \Leftrightarrow x^3 \equiv 2Ax^3 + (2B + 3A)\,x^2 + 2(B + C)x + (2D + C) \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{3}{4};\ C = \frac{3}{4},\ D = -\frac{3}{8}$.

Deci $\int x^3 e^{2x}\,dx = e^{2x}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}\right] + k$.

Metoda II. $\int uv' = uv - \int vu'$;

$$x^3 = u \Rightarrow 3x^2 = u';\ e^{2x} = v' \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

deci

$$I = x^3\frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\,dx.$$

Se notează cu $I_1 = \int x^2 e^{2x}\,dx$ și se integrează încă o dată prin părți

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x,\ \ v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

deci

$$I_1 = x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int x\,e^{2x}\,dx.$$

Se notează cu $I_3 = \int x\, e^{2x}\, dx$ şi se şi se integrează încă o dată prin părţi notînd

$$u = x \Rightarrow u' = 1;\ v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \text{ etc.}$$

3) $\int (x^4 + 1)\, e^{-x}\, dx = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)\, e^{-x}$ etc. Se observă că metoda este cu atît mai avantajoasă, cu cît gradul lui $P(x)$ este mai mare.

TESTUL 201

I.1) $\int (x^3 + x) \sin x\, dx = [(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cos x] + k$. Prin derivare rezultă: $(x^3 + x)\sin x = (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x - (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sin x + (3ax^2 + 2bx + c)\cos x \Leftrightarrow (x^3 + x)\sin x \equiv (3Ax^2 + 2Bx + C - ax^3 - bx^2 - cx - d)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + 3ax^2 + 2bx + c)\cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x \equiv -ax^3 + x^2(3A - b) + (2B - c)x + C - d \\ 0 \equiv Ax^3 + x^2(3a + B) + x(2b + C) + D + c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 3A - b = 0 \\ 2B - c = 1 \\ C - d = 0 \\ A = 0 \\ 3a + B = 0 \\ 2b + C = 0 \\ D + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ A = 0 \\ b = 0 \\ C = 0 \\ d = 0 \\ B = +3 \\ c = 5 \\ D = -5 \end{cases}$$

Deci $\int (x^3 + x)\sin x\, dx = (3x^2 - 5)\sin x + (-x^3 + 5x)\cos x + k.$

2) $(4x^3 - 24x)\sin x - (x^4 - 12x^2 + 24)\cos x + k.$

3) $\frac{5}{8}(2x^4 - 6x^2 + 3)\sin 2x - \frac{1}{4}(2x^5 - 10x^3 + 15x)\cos 2x + k.$

4) $\frac{2}{49}x\sin 7x - \frac{1}{343}(49x^2 - 2)\cos 7x$.

II.1) $\int e^{2x}x\cos x\,dx = e^{2x}[(Ax+B)\cos x + (ax+b)\sin x] + k$.

Se derivează și după ordonare se obține:

$x\cos x = [x(2A + a) + 2B + A + b]\cos x + [x(2a - A) + 2b - B + a]\sin x$.

$$\begin{cases} 2A + a = 1 \\ 2B + A + b = 0 \\ 2a - A = 0 \\ 2b - B + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{3}{25} \\ b = -\frac{4}{25} \\ A = \frac{2}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \int e^{2x}x\cos x\,dx =$$

$$= e^{2x}\left[\left(\frac{2x}{5} - \frac{3}{25}\right)\cos x + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)\sin x\right] + k.$$

2) $\int e^x[x^2\sin x + x\cos x]dx = e^x[(Ax^2 + Bx + C)\sin x + (ax^2 + bx + c)\cos x] + k$.

3) $\int x^2e^{3x}\cos 4x\,dx = e^{3x}[(Ax^2 + Bx + C)\sin 4x + (ax^2 + bx + c)\cos 4x] + k$.

4) $\int e^{2x}[x\sin 2x + \cos 2x]\,dx = e^{3x}[(Ax + B)\sin 2x + (ax + b)\cos 2x] + k$.

TESTUL 202

Se știe că o funcție f a cărei expresie este de forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame prime între ele cu coeficienți reali, se numește funcție rațională. Dacă

grd $P(x) \geqslant$ grd $Q(x)$ atunci fracția rațională se descompune în mod unic într-o sumă formată dintr-un polinom și o funcție rațională, adică $P(x) = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ unde polinomul $R(x)$ este restul împărțirii polinomului $P(x)$ la polinomul $Q(x)$ și grd $R(x) <$ grd $Q(x)$, iar $C(x)$ este cîtul. Deci

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

Fracția $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se numește fracție regulată (sau proprie). Polinoamele $R(x)$ și $Q(x)$ sînt prime între ele, au coeficienții reali și grd $R(x) <$ grd $(Q(x)$.

Dacă $Q(x) = (x - x_1)^m (x - x_2)^n \ldots (x^2 + px + q)^k$; $p^2 - 4q < 0$, atunci fracția regulată se descompune în mod unic într-o sumă de fracții simple: $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} +$

$$+ \frac{A_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x - x_1)^m} + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_n}{(x - x_2)^n} + \ldots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{C_kx + D_k}{(x^2 + px + q)^k}.$$

1. Se descompune fracția regulată în fracții simple:

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} +$$

$$+ \frac{D}{x-2} + \frac{E}{x+2}. \quad (\alpha)$$

$x^2 + 2x - 4 = A(x^2 - 1)(x^2 - 4) + B(x)(x + 1)(x^2 - 4) +$
$+ Cx(x - 1)(x^2 - 4) + Dx(x^2 - 1)(x+2) + Ex(x^2 - 1)(x - 2).$

Se ordonează în membrul drept după puterile lui x şi identificînd coeficienţii termenilor de acelaşi grad rezultă:

$$\begin{cases} 4A = -4 \\ A + B + C + D + E = 0 \\ B - C + 2D - 2E = 0 \\ -5A - 4B - 4C - D - E = 1 \\ -4B + 4C - 2D + 2E = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -1, \quad B = \frac{1}{6}, C = \frac{5}{6}, \quad D = \frac{1}{6}, E = -\frac{1}{6}.$$

Deci $I = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^5 (x-1)(x-2)}{x^6(x+2)} \right| + C.$

Pentru determinarea coeficienţilor A, B, C, D, E, F, se poate proceda şi astfel: se amplifică relaţia (α) cu $x \Rightarrow \frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = A + x\left[\frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{x+2}\right]$ şi pentru $x = 0 \Rightarrow \frac{-4}{4} = A \Rightarrow A = -1;$ apoi se amplifică cu $x-1$ şi se face $x = 1$ rezultînd B etc.

2. Cum gradul numărătorului este mai mare decît gradul numitorului se efectuează întîi împărţirea şi rezultă

$$\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1}; \quad \frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1};$$

coeficienţii se pot determina prin identificare sau amplificînd cu $x-1$ şi făcînd $x = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$, iar apoi amplificînd cu x^2+x+1, rezultă $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1}(x^2+x+1) = Bx + C.$

Cum descompunerea este unică, pentru $x = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{x^2+x+1}{3(x-1)} - \frac{1}{3} = Bx$, şi dînd lui x

o valoare oarecare diferită de 1, rezultă $B = -\frac{1}{3}$.

Deci $I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$.

Pentru calculul lui

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+x+1}\right) - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. Se scrie $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \Rightarrow 1 =$
$=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)$. Procedînd ca la ex. 2, pentru $x = i \Rightarrow 3B + 3Ai = 1 \Rightarrow A = 0,\ B = \frac{1}{3}$.

Pentru $x = 2i \Rightarrow -3D - 6Ci = 1 \Rightarrow C = 0,\ D = -\frac{1}{3}$.

În final,

$$I = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.$$

4. $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2} +$

$$+ \frac{D}{(x+3)^3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)}.$$

În final rezultă

$$I = \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C.$$

5. Se scrie $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)} = \dfrac{A}{(x-1)^3} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1}$; amplificînd cu $(x-1)^3$ și apoi pentru $x=1$ rezultă $A=1$. Deci $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)} - \dfrac{1}{(x-1)^3} = \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1}$. $B = \dfrac{2x+3}{(x^2+1)}\Big|_{x=1} = \dfrac{5}{2}$.

Înlocuind pe B cu $\dfrac{5}{2}$ și repetînd procedeul rezultă $C = \dfrac{-5x-1}{2(x^2+1)}\Big|_{x=1} = -\dfrac{3}{2}$, iar pentru determinarea coeficienților D și E procedăm ca la punctul 3).

6. Se face substituția $x + \dfrac{1}{x} = t$, după ce s-a simplificat expresia prin x^2.

TESTUL 203

1. Se face substituția $x+1 = t^6 \Rightarrow \varphi(t) = t^6 - 1$; $\varphi'(t) = 6t^5$; $\sqrt{x+1} = t^3$, $\sqrt[3]{x+1} = t^2$. Se obține

$$I = -6\left[\frac{(x+1)\sqrt[6]{x+1}}{7} + \frac{\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{(x+1)^4}}{4} + \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{3} + \frac{\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2} + \sqrt[6]{x+1} + \ln\left|1 - \sqrt[6]{x+1}\right|\right] + C.$$

2. Cum $\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4} = (x-1)(x+1)\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ se face substituția $\dfrac{x-1}{x+1} = t^3 \Rightarrow \varphi(t) = \dfrac{1+t^3}{1-t^3}$; $\varphi'(t) = \dfrac{6t^2}{(1-t^3)^2}$; $x+1 = \dfrac{2}{1-t^3}$, iar $x-1 = \dfrac{2t^3}{1-t^3}$.

Atunci

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \int \frac{\dfrac{6t^2}{(1-t^3)^2}\,dt}{\dfrac{2t^3}{1-t^3}\cdot\dfrac{2}{1-t^3}\,t} =$$

$$= \frac{3}{2}\int t^{-2}\,dt = -\frac{3}{2t} + C; \Rightarrow I = -\frac{3}{2\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}} + c =$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

3. Se face substituția: $\sqrt{x^2+x+1} = (x+t) \Rightarrow \varphi(t) =$

$$= \frac{t^2-1}{1-2t},\quad \varphi'(t) = -2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}.$$

Şi rezultă

$$I = \ln C\,\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x+2}.$$

4. Integrantul se mai scrie:

$$\frac{x^{2n}\left(1+\dfrac{1}{x^{2n}}\right)x^{n-1}}{x^{2n}\left(x^{2n}+\dfrac{1}{x^{2n}}\right)};$$ se face substituția $x^n - \dfrac{1}{x^n} = t$,

rezultînd:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2n}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,(x^{2n}-1)}{2x^n} + k.$$

Observație: $\varphi'(t)$ se mai poate deduce şi astfel:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{[\varphi^{-1}(x)]'}.$$

1. Se poate scrie:

$$\frac{\sin x}{\dfrac{3\cos^2 x + \cos^2 x \sin^2 x}{\sin^2 x}} = \sin x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\,(3 + \sin^2 x)};$$

Se observă că $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, deci se face substituția $\cos x = t \Rightarrow -\sin x = [\varphi^{-1}(x)]'$; $\sin^2 x = 1 - t^2$.

$$\text{Rezultă} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, \mathrm{d}t = -\int \frac{1 - t^2}{t^2\,(4 - t^2)}\, \mathrm{d}t \ \text{ etc.}$$

2. Fiindcă $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ se face substituția:

$$t = \sin x \Rightarrow [\varphi^{-1}(x)]' = \cos x \ \text{ și}$$

$$I = \int \frac{\cos x\, \mathrm{d}x}{\cos^2 x\,(2\sin^2 x - 1)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1 - t^2)\,(2t^2 - 1)}.$$

3. Se face substituția $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = \varphi(t) = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = \frac{2}{1 + t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int \frac{\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot \dfrac{2\mathrm{d}t}{1 + t^2}}{1 + \dfrac{2t}{1 + t^2}} = 2\int \frac{(1 - t^2)\mathrm{d}t}{(1 + t^2)(1 + t)^2} =$$

$$= 2\int \frac{(1 - t)\mathrm{d}t}{(1 + t)(1 + t^2)} \ \text{ etc.}$$

Altfel; se transformă expresia

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos x\,(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x},$$

sau, mai simplu

$$\int \frac{\cos x\, \mathrm{d}x}{1 + \sin x} = \int \frac{(\sin x)'\, \mathrm{d}x}{1 + \sin x} = \ln(1 + \sin x) + C.$$

4. Se poate face substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, sau se transformă expresia astfel:

$$\frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \operatorname{tg}^2 x.$$

5. Se poate face substituţia $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ şi $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ sau altfel: $\int \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow$

$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{(\operatorname{tg} x)' dx}{\operatorname{tg}^2 x} = \int \operatorname{tg}^{-2} x\,(\operatorname{tg} x)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + C = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Pentru calcularea primitivelor **6, 7** şi **8** se apelează la formulele:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

9. $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{dx}{1 - 2\sin^2 x\cos^2 x}.$

Metoda I. Se face substituţia (α) $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$,

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = \int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)} dt.$$

Se face substituția:

$$(\beta)\quad t - \frac{1}{t} = u \Rightarrow u' = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right), \quad t^2 + \frac{1}{t^2} = u^2 + 2 \Rightarrow I =$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + 2}. \text{ Deci } I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}}.$$

Ținînd cont de substituțiile (α) și (β) rezultă;

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + C.$$

Metoda a II-a. $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{dx}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}.$

Se face substituția:

$\operatorname{tg} 2x = v \Rightarrow \varphi'(v) = \frac{1}{2(1 + v^2)}; \quad \sin^2 2x = \frac{v^2}{1 + v^2}.$ Deci

$$\int \frac{dv}{v^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{2}}$$

sau revenind la substituția făcută rezultă

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + C.$$

Metoda a III-a. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \cos^2 2x (2 + \operatorname{tg}^2 2x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = 2 \int \frac{(\operatorname{tg} 2x)' dx}{2 + \operatorname{tg}^2 2x}.$$

TESTUL 205

I.1. Funcția este monoton crescătoare pe intervalul $[0, 1]$ deci este integrabilă.

2. Funcția nu este monotonă pe intervalul $(-\infty, \infty)$.

3. Funcția este monoton crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

4. Funcția este monoton descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

5—6. Funcțiile fiind continue pe domeniile specificate, rezultă că sînt integrabile.

II. Se demonstrează că funcția f este continuă pe I. Pentru aceasta vom presupune că există un punct $x_0 \in I$ în care funcția nu este continuă. Rezultă imediat că $l_d(x_0)$, $l_s(x_0)$ și $f(x_0)$ nu sînt egale. Pentru fixarea ideilor presupunem că $l_d(x_0) > f(x_0)$.

Notînd cu $\varepsilon = l_d(x_0) - f(x_0) > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru $x_0 - \delta < x < x_0$ avem: $|f(x) - l_d| < \frac{\varepsilon}{2}$ adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{3\varepsilon}{2}$. Pentru un punct oarecare $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$, care odată ales îl fixăm vom avea: $f(x_1) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Rezultă că există un punct $\xi \in (x_1, x_0)$ astfel încît $f(\xi) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$ (deoarece funcția are proprietatea lui Darboux). Rezultă că $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\left(\text{fiindcă } f(\xi) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ceea ce este absurd.

III. Funcția se mai scrie sub forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ \dfrac{2x^2 - 5x + 10}{x^2 + 9} & \text{pentru } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

și este continuă pe R.

TESTUL 206

1. Suma $m + n = 2k$, $k \in N \Leftrightarrow$ numerele naturale m și n au aceeași paritate. În cazul în care m și n sînt numere impare, rezultă $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt = -\int (1 - t^2)^p \cdot t^n\, dt$,

unde $x = \varphi(t) = \arccos t$. În cazul în care m și n sînt numere pare, se folosesc formulele:
$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ și $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ pînă cînd se ajunge la cazul precedent. Suma $m + n = 2k + 1$, $k \in N \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ numerele nu au aceeași paritate.

2. *Metoda I.* Dacă $n = 2p + 1$ atunci: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^{2p+1} x} =$

$$= \int \frac{dx}{(\sin^2 x)^p \sin x} = \int \frac{\sin x \, dx}{(\sin^2 x)^{p+1}} = -\int \frac{(\cos x)' dx}{(1 - \cos^2 x)^{p+1}} \text{ etc.}$$

Dacă $n = 2p$ atunci:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2p} x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^p dx \Rightarrow \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{1 + t^2}{t^2}\right)^p \frac{dt}{1 + t^2}; \text{ unde } x = \varphi(t) = \operatorname{arctg} t.$$

Metoda a II-a.

$$\int \frac{dx}{\sin^{2p} x} = \int \frac{1}{(\sin^2 x)^{p-1}} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{(1 + t^2)^{p-1}}$$

unde $x = \varphi(t) = \operatorname{arcctg} t$.

Pentru calculul lui I_n se mai poate folosi metoda integrării prin părți, obținîndu-se în final formula de recurență:

$$I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}.$$

3. A se studia punctul **2.**

4. $I_n = \displaystyle\int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$

$$= \int \frac{\operatorname{tg}^{n-2} x}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}.$$

5. Analog punctului **4.** **6.** Prin recurență se ajunge la formula $I_n = \dfrac{\cos^{n-1} x, \sin x}{n} + \dfrac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$, sau dacă $n =$

$$= 2p \Rightarrow I_n = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^p dx, \text{ iar dacă } n = 2p + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = \int (1 - \sin^2 x)^p \cdot \cos x \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt = \int (1 - t^2)^p \, dt \text{ unde } x = \varphi(t) = \arcsin t.$$

TESTUL 207

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$$= [\ln(x+2) - \ln(x+3)] \Big|_0^1 = \left[\ln \frac{x+2}{x+3}\right]\Big|_0^1 = \ln \frac{9}{8}.$$

2. $$\int_0^\pi |\cos x| \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\, dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$$

3. $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x\left(1 + 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1 + 3\,\mathrm{tg}^2 x} =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1 + 3t^2}; \text{ s-a făcut substituția } \mathrm{tg}\, x = t.$$

4. Se face schimbarea de variabilă

$$x = \varphi(t) = \frac{3}{\cos t}$$

x	3	6
t	0	$\frac{\pi}{3}$

și cum funcția $\frac{1}{\cos t}$ este strict monotonă pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ înseamnă că substituția este valabilă și

$$\Rightarrow I = \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{9(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}}}{\frac{81}{\cos^4 t}} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cdot \cos t \cdot dt = \frac{1}{9} \cdot \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{72}.$$

5. Se folosește formula de integrare prin părți și

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. $I = \int_0^1 \ln(1+x) \cdot [\ln(1+x)]'\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\ln^2(1+x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln^2 2.$$

7. $I = \int_0^1 \ln(x+1)dx - 3\int_0^1 \frac{1}{x+1}\ln(x+1)dx =$

$= [(x+1)\ln(x+1) - x]\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\ln^2(x+1)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln^2 2 - 1$. **8.** Se scrie $I = I_1 + I_2$. Pentru calculul lui $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$, se face substituția $x = \varphi(t) = 2\sin t$ și rezultă în final $I_1 = \pi$. Pentru calculul lui $I_2 = \int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$ se face substituția $x = \varphi(t) = 2 + 2\sin t$ rezultînd în final $I_2 = \pi$. Deci $I = 2\pi$.

$$9.\ I=\int_0^1 \frac{3x+2}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx=-\frac{4}{3}\int_0^1\frac{dx}{x+2}+$$

$$+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{4x+5}{x^2+x+1}\,dx=-\frac{4}{3}\int_0^1\frac{dx}{x+2}+$$

$$+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=-\frac{4}{3}\ln(x+2)\Big|_0^1+\frac{2}{3}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\ln\frac{4}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

TESTUL 208

1. a) Se integrează prin părți și se ajunge la relația de recurență

$$I_n=\frac{1}{\pi}-\frac{n(n-1)}{\pi^2}\cdot I_{n-2}.$$

b) Dacă $n=2p\Rightarrow$

$$\Rightarrow I_{2p}=\frac{1}{\pi}-\frac{2p(2p-1)}{\pi^2}I_{2p-2}$$

$$I_{2p-2}=\frac{1}{\pi}-\frac{(2p-2)(2p-3)}{\pi^2}I_{2p-4}$$

....

$$I_4=\frac{1}{\pi}-\frac{4\cdot 3}{\pi^2}I_2$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}-\frac{2\cdot 1}{\pi^2}I_0$$

$$1$$

$$-\frac{2p(2p-1)}{\pi^2}$$

....

$$(-1)^p\cdot\frac{(2p)(2p-1)\ldots 4}{\pi^{2p-1}}$$

$$(-1)^p\cdot\frac{(2p)\ldots 4\cdot 3}{\pi^{2p-2}}$$

Se amplifică fiecare relație cu factorul scris în dreptul său, și ținînd seama că $I_0 = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi}$, însumînd membru cu membru se obține:

$$I_{2p} = \frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{2p(2p-1)}{\pi^2} + \frac{2p(2p-1)(2p-3)}{\pi^4} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(2p)(2p-1)\ldots 4 \cdot 3}{\pi^{2p-2}} + (-1)^{p+1}\frac{(2p)!2}{\pi^{2p}}\right].$$

Procedînd analog se obține și $I_{2p+1} = \frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{(2p-1)2p}{\pi^2} + \right.$
$$+ \frac{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)}{\pi^4} + \ldots + (-1)^p \frac{(2p+1)!}{3 \cdot 2\pi^{2p-2}} +$$
$$\left. + (-1)^{p+1}\frac{(2p+1)!}{\pi^{2p}}\right].$$

c) Deoarece $0 < |x^n \sin(\pi x)| < x^n$ rezultă că $\int_0^1 dx \cdot 0 <$
$< \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \Rightarrow I_n \to 0$ pentru $n \to \infty$.

2. Deoarece $\max\limits_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} (\sin x; \cos x) =$

$$= \begin{cases} \cos x \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \sin x \text{ pentru } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

rezultă că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(\sin x, \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \sqrt{2}.$$

TESTUL 209

1. a) Folosind dezvoltarea binomului după *Newton* se poate scrie:

$$I_n = \int_0^1 (1 + x)^n dx = \int_0^1 (1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots C_n^n x^n)\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k,$$

iar pe de altă parte, integrînd direct se obţine:

$$I_n = \frac{2^{n+1} + 1}{n+1}.$$

b) Se calculează în două moduri $I_n = \int_0^1 (1-x)^n dx.$

2. Formula de recurenţă este: $I_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{n-1};\ n \in N,$ $n \geq 1$, iar $I_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n+1}} \cdot \pi.$

TESTUL 210

1. Se împarte intervalul [0, 10] în n părţi egale prin punctele $x_i = \frac{10i}{n}$, $(i = 0, 1, 2\dots n)$, obţinîndu-se diviziunea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 10$. Deoarece $|x_{i+1} - x_i| = \frac{10}{n}$ rezultă că norma diviziunii tinde către zero cînd $n \to \infty$.

Funcţia $f(x) = 2^x$ este o funcţie continuă pe [0, 10], deci este integrabilă pe acest interval. Rezultă că oricare ar fi şirul de diviziuni cu norma tinzînd către zero, şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, şirul sumelor integrale tinde către $\int_0^{10} 2^x dx.$

Ținînd seama de interpretarea geometrică a integralei, aria respectivă este egală cu $\int_0^{10} 2^x \mathrm{d}x$. Vom calcula integrala, astfel:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{d_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\xi_i}(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{10}{n} \cdot 2^{\xi_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\xi_i} = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}.$$

2. a) Se scrie: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}$. Dar $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}$ este suma integrală a funcției $f(x) = x$, pe intervalul $[0, 1]$. Într-adevăr, împărțind intervalul $[0, 1]$ în n părți egale prin punctele $x_{k-1} = \frac{k-1}{n}$, se obține diviziunea d: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} \ldots < x_n = 1$, cu norma $|x_{i+1} - x_i| = \frac{1}{n} \to 0$. Funcția $f(x) = x$ este integrabilă pe $[0, 1]$. Se aleg punctele intermediare $\xi_k = \frac{k-1}{n}$ și atunci $f(\xi_k) = \frac{k-1}{n}$. Deci $\lim \delta_{d_n}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} =$ $= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. b) Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot$

$$\cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$.

3. a) Conform figurii 77 aria trapezului curbiliniu $AabBm$ este mai mică decît aria trapezului $AabB$ și mai mare decît aria dreptunghiului $AabC$. Dar

$$A_{AabBm} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad A_{Aabc} = f(a) \cdot (b - a),$$

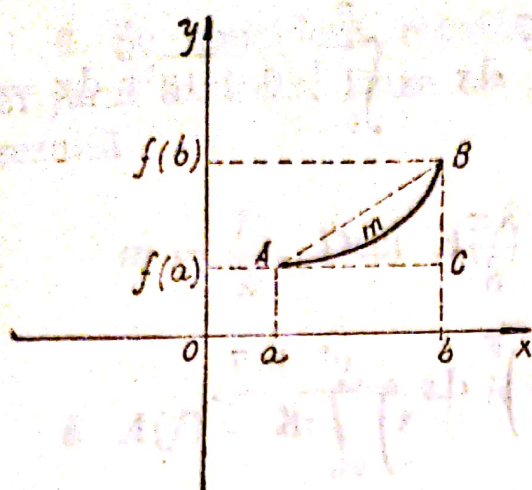


Fig. 77

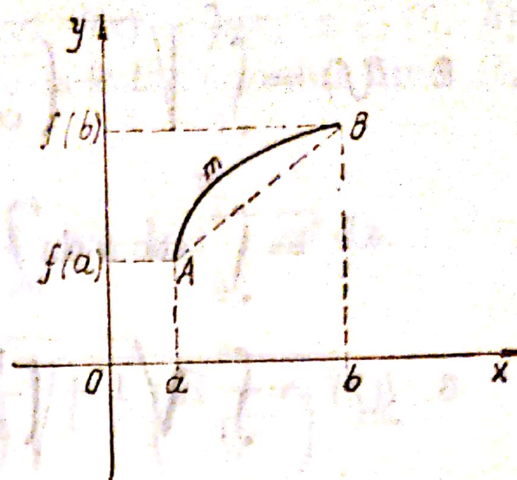


Fig. 78

iar $$A_{AabB} = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$

b) Folosind figura 78 se procedează ca la punctul precedent.

TESTUL 211

I. Mai întîi se reprezintă grafic funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ și apoi se determină coordonatele punctelor de intersecție.

1. aria $\Gamma_{f,g} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\left(4 - \frac{x^2}{3}\right) - x^2\right] dx = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$

2. aria $\Gamma_{f,g} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\sin x - \frac{1}{2}\right] dx = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$

3. aria $\Gamma_{f,g} = \int_0^2 [7 - 6x - (-x^2 - 2x + 3)]\, dx = \frac{8}{3}.$

II. Lungimea graficului funcției continue $f:[a, b] \to R_+$, cu derivată continuă, este $l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$

1. $l(f) = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx.$

2. $l(f) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\, dx = \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}.$$

3. $l(f) = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)^2}\, dx = \frac{e^2 + 7}{8}.$

TESTUL 212

I. 1. Dacă $f: [a, b] \to R_+$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă atunci suprafața de rotație determinată de f are arie și

$$A(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

1) $-2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, (\cos x)'\, dx = 2\pi \left[\sqrt{2} + \right.$

$$\left. + \ln(\sqrt{2} + 1)\right].$$

Deci se obține:

$$A(f) = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = 2\pi \left[\sqrt{2} + \right.$$

$$\left. + \ln(\sqrt{2} + 1)\right],$$

2. $A(f) = 2\pi \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4 + x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4(4 + x)}}\, dx =$ etc.

3. $A(f) = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{14\pi}{3}.$

II. 1. Suprafața sferei cu centrul în origine și de rază R se obține prin rotația graficului funcției

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2};\ x \in [-R, R] \text{ în jurul axei } Ox.$$

$$A(f) = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\pi R^2.$$

2. Se consideră rotația dreptei $f(x) = mx$, $x \in [0, h]$ în jurul axei Ox. Raza cercului de la baza conului fiind R, rezultă

$$m = \frac{R}{h}. \text{ Deci } A(f) = 2\pi \int_0^h mx\sqrt{1 + m^2}\, dx.$$

3. $$A(f) = 2\pi \int_0^h \left(r + \frac{R - r}{h}x\right)\sqrt{1 + \left(\frac{R - r}{h}\right)^2}\, dx.$$

TESTUL 213

I. Dacă funcția $f : [a, b] \to R_+$ este o funcție continuă, atunci corpul de rotație determinat de f are volum și

$$V(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

1. $$V(C_f) = \pi \int_0^\pi \sin^4 x\, dx = \frac{3\pi^2}{8}.$$

II. 4. $$V = \pi \int_0^a \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^4 dx = \frac{1}{15}\pi a^3.$$

III. 1. $\bar{x}_A = \frac{\pi}{2}$ din motive de simetrie

$$\bar{y}_A = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b g^2(x)\, dx}{\text{aria } \Gamma_g} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\, dx}{\int_0^\pi \sin x\, dx} = \frac{\pi}{8}.$$

2. $\bar{x}_A = 0$, $\bar{y}_A = \frac{2a}{\pi}$.

TESTUL 214

Formula trapezelor este o formulă de calcul aproximativ al integralelor şi se exprimă astfel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

unde $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (punctele x_k împărţind în n părţi egale intervalul $[a, b]$). Eroarea este $|R| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M$ unde $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

1. Pentru uşurarea calculului se alcătuieşte tabelul alăturat:

x_i	$y_i = \frac{1}{1+x_i}$
0	1
0,1	0,9091
0,2	0,8333
0,3	0,7692
0,4	0,7143
0,5	0,6667
0,6	0,6250
0,7	0,5883
0,8	0,5556
0,9	0,5263
1	0,5000

Utilizînd formula rezultă:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10}\left[\frac{1+0,5}{2} + 0,9091 + 0,8333 + 0,7692 + 0,7143 + 0,6667 + 0,6250 + 0,5883 + 0,5556 + 0,5263\right] = 0,6938, \text{ iar}$$

$$|R| < 0,0017.$$

Observaţie. Deoarece

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,6938 \approx \ln 2.$$

2. Funcţia primitivă nu poate să fie exprimată cu ajutorul funcţiilor elementare şi atunci valoarea exactă a integralei nu poate să fie determinată. În acest caz, singura cale posibilă este o metodă aproximativă. Vom aplica metoda trapezelor.

Formăm tabelul:

x_i	$y_i = \frac{1}{\sqrt{1+x_i^4}}$
0	1
0,1	0,99995
0,2	0,99920
0,3	0,99557
0,4	0,98744
0,5	0,97014
0,6	0,94090
0,7	0,89798
0,8	0,84226
0,9	0,77706
1	

Deci $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx 0.92644.$

Fiindcă $f''(x) < 0$, $x \in [0, 1]$, valoarea găsită aproximează prin lipsă integrala.

TESTUL 215

Prin metoda lui *Simpson*:

1. $\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 1,10$; **2.** $\int_0^2 e^{-x^2}\, dx \approx 0,88$;

3. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 1,85.$

Prin metoda trapezelor:

1. $\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 1,12$; **2.** $\int_0^2 e^{-x^2}\, dx \approx 0,88$;

3. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 1,84.$

TESTUL 216

În cazul unui polinom de grad n, care pentru $x = x_i$ admite valorile $y_i (i = 0, 1, 2 \dots n)$, formula de interpolare a lui *Lagrange* este:

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} y_1 + \dots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} y_i +$$

$$+ \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} y_n.$$

1. În cazul nostru avem:

$x_0 = 23{,}20$, $x_1 = 24{,}25$, $x_2 = 25{,}25$, $x_3 = 26{,}10$, $y_0 = 299$, $y_1 = 328$, $y_2 = 373$, $y_3 = 415$. Deci,

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3.$$

După înlocuire se obține: $y = -1{,}7992x^3 + 138{,}30x^2 - 3497{,}8x + 29444$.

2. Polinomul de interpolare este:

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} \cdot 24 +$$

$$+ \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} \cdot (-8) +$$

$$+ \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} \cdot (-15) +$$

$$+ \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)} \cdot (-23).$$

După efectuarea calculelor, rezultă $y = x^2 - 10x + 1$, deci pentru $x = 0$ avem $y = 1$.

3. Polinomul de interpolare este:

$$y = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(0-1)(0-3)(0-4)(0-5)} \cdot 1 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-0)(1-3)(1-4)(1-5)} \cdot (-7) +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-4)(x-5)}{(3-0)(3-1)(3-4)(3-5)} \cdot 14 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-5)}{(4-0)(4-1)(4-3)(4-5)} \cdot 215 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{(5-0)(5-1)(5-3)(5-4)} \cdot 400 \text{ etc.}$$

TESTUL 217

1. Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe $[a, b]$ și dacă în segmentul $[a, b]$ există o singură rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, atunci prin unirea punctelor de coordonate $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ se găsește o primă aproximație a rădăcinii $x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$. Pentru a doua aproximație a rădăcinii

se aplică formula de mai sus pe segmentul $[a, x_1]$ sau $[x_1, b]$ după cum $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ sau $f(x_1) f(b) < 0$. Aproximările următoare se obțin în același mod. Șirul $x_1, x_2, x_3 \dots x_n \dots$ converge către rădăcina ξ. Evaluarea erorii absolute, este dată de formula $|\xi - x_n| < \frac{|f(x_n)|}{M}$ unde $M = \min\limits_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

În cazul exercițiului propus avem $f(1) < 0$ și $f(2) > 0$. Deci rădăcina pozitivă aparține intervalului (1, 2) Intervalul acesta fiind mare îl împărțim în două părți (1, 1,5) și (1,5; 2). Deoarece $f(1) < 0$ și $f(1{,}5) = 1{,}425 > 0$ rezultă că rădăcina aparține intervalului (1; 1,5). Aplicînd succesiv formula de mai sus rezultă:

$$x_1 = 1 + \frac{0{,}6}{1{,}45 + 0{,}6}(1{,}5 - 1) = 1{,}15 \dots;$$

cum $f(x_1) = -0{,}173$ înseamnă că rădăcina este situată în intervalul (1,15, 1,5) deci $x_2 = 1{,}15 + \frac{0{,}173}{1{,}425 + 0{,}17} \cdot (1{,}5 - 1{,}15) = 1{,}19$ și cum $f(1{,}19) = -0{,}036 < 0$, rezultă că rădăcina este situată în intervalul (1,19, 1,5). Deci, $x_3 = 1{,}19 + \frac{0{,}036}{1{,}425 + 0{,}036}(1{,}5 - 1{,}19) = 1{,}198$. Deoarece $f(x_3) = -0{,}0072$ rezultă că rădăcina $x \in (1{,}198,\ 1{,}5)$. Deoarece $f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x - 0{,}2$ și $1{,}198 < x < 1{,}15$, $f'(1{,}198) = 3{,}49$ rezultă că $0 < \xi - x_3 < \frac{0{,}072}{3{,}49} \approx 0{,}002$. Deci rădăcina $\xi = 1{,}198 + 0{,}002\,\theta$ cu $\theta \in (0,1)$. Deci $\xi \approx 1{,}2$.

2. Metoda tangentelor (sau metoda lui *Newton*). Dacă $f'(x) \neq 0$ și $f''(x) \neq 0$ pentru $x \in [a, b]$ și în cazul în care $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f''(a) > 0$ atunci șirul de aproximări $x_0, x_1, x_2, \dots x_n \dots$ al rădăcinii ξ a ecuației $f(x) = 0$ se calculează după formula:

$$x_0 = a,\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ (n = 1, 2 \dots).$$

Eroarea absolută este dată de formula

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{M} \text{ unde } M = \min_{x \in [a, b]} f'(x).$$

În cazul ecuației propuse $f(0) = -10\,000$, $f(-10) = -1\,050$, $f(-100) \approx 10^8$. Rezultă că $\xi \in (-100, -10)$. Reducînd intervalul obținem că rădăcina negativă aparține intervalului $(-11, -10)$. În acest interval $f'(x) < 0$ și $f''(x) > 0$. Luăm $x_0 = -11$ și calculăm succesiv:

$x_1 = -10{,}3$, $f(x_1) = 134{,}3$, $f'(x_1) = -4253 \Rightarrow h_1 = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}03$; $x_2 = -10{,}27$, $f(x_2) = 37{,}8$; $f'(x_2) = -4196 \Rightarrow h_2 = -\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}009$; $x_3 = -10{,}261$, $f'(x_3) = 0{,}2$.

Deoarece $f(x_3 + 0{,}001) = f(-10{,}260) < 0$ și $f(-10{,}261) > 0$ rezultă $-10{,}261 < \xi < -10{,}260$.

3. Deoarece $f(1) < 0$ și $f(1{,}1) > 0$ înseamnă că rădăcina aparține intervalului $(1, 1{,}1)$. Cum $f'(x) = 5x^4 - 1$ și $f''(x) = 20x^3$ sînt pozitive în acest interval considerăm $x_0 = 1$, $f(1) = -0{,}2$, $f(1{,}1) = 0{,}310 \Rightarrow f'(1{,}1) = 6{,}3205 \Rightarrow x_1 = 1 + \dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}51051} \approx 1{,}039$, $\bar{x}_1 = 1{,}1 - \dfrac{0{,}31051}{6{,}3205} \approx 1{,}051$. Cum $\bar{x}_1 - x_1 = 0{,}012$ rezultă că precizia nu este suficientă. Se calculează

$$x_2 = 1{,}039 + \frac{0{,}012 \cdot 0{,}0282}{0{,}0595} \approx 1{,}04469;$$

$$\bar{x}_2 = 1{,}051 - \frac{0{,}0313}{5{,}1005} \approx 1{,}04487.$$

Deoarece $\bar{x}_2 - x_1 = 0{,}00018$ rezultă că precizia este cea impusă. Avem $\bar{\xi} = \dfrac{1}{2}[1{,}04469 + 1{,}04487] \approx 1{,}045$.

TESTUL 218

1. Rădăcinile sînt: $\xi_1 = 1{,}188$, $\xi_2 = 0{,}35$, $\xi_3 = 1{,}58$.

2. a) $\xi = 2{,}45$. b) $\xi = 0{,}31$.

a) Deoarece $Y'(x) = 2x \Rightarrow Y(x) = x^2 + C$. Integrala generală a ecuației reprezintă o familie de parabole (fig. 79). A determina soluția particulară care satisface condiția $Y(1) = 2$, revine la a determina acea parabolă din familie care trece prin punctul $M(1, 2)$. Înlocuind în soluția generală pe $x = 1$ și $y = 2$ se determină constanta C. Avem $2 = 1^2 + C \Rightarrow C = 1$. Deci integrala particulară este $y = x^2 + 1$.

b) Ecuația $Y'(x) = Y$ se mai scrie sub forma $\frac{Y'(x)}{Y(x)} = 1 \Rightarrow Y(x) = Ce^x$. Așadar, integrala generală (soluția generală) este o familie de curbe (fig. 80) care sînt grafice de funcții exponențiale. Pentru a determina soluția care satisface condițiile inițiale se înlocuiește în soluția generală $x = 0$ și $Y = 2$ de unde rezultă funcția $Y(x) = 2e^x$. c) Este o ecuație diferențială cu variabile separabile care se mai scrie sub forma $\frac{Y'(x)}{Y(x)} = 2x \Rightarrow Y(x) = Ce^{x^2}$, iar soluția problemei lui *Cauchy* este $Y(x) = e^{x^2}$. d) Ecuația se mai scrie sub forma $\frac{Y'(x)}{Y(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow Y(x) = x + C$; soluția particulară este $Y(x) = x$. e) Ecuația se mai scrie sub forma $\frac{Y'(x)}{e^{Y(x)}} = 1$, iar soluția particulară căutată este $Y(x) = \ln(x + e)$. f) Soluția care satisface condițiile inițiale este

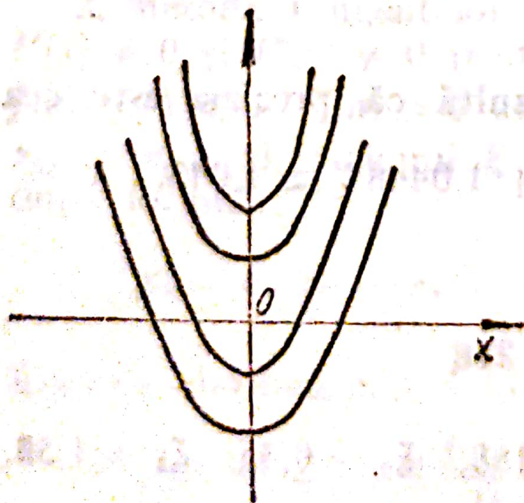


Fig. 79

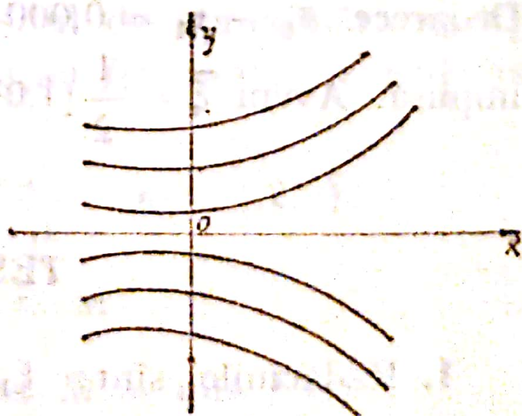


Fig. 80

$Y(x) = \sqrt{1 + x^2}$. g) Separînd variabilele se obține $\frac{Y'(x)}{Y(x)} =$ $= \operatorname{ctg} x$, iar soluția generală este $Y(x) = C \sin x$. h) Se separă variabilele și ecuația se mai scrie: $\frac{Y'(x)}{1 - Y^2(x)} +$ $+ \operatorname{tg} x = 0$, de unde rezultă integrala generală $Y(x) + 1 =$ $= C[Y(x) - 1] \cdot \cos^2 x$. i) Separînd variabilele ecuația se scrie: $\frac{Y'(x)}{Y^2(x) + 2Y(x) + 2} = xe^x$ și ecuația curbei particulare căutate este $Y(x) = -1 + \operatorname{tg}[1 + (x - 1)e^x]$. j) Prin separarea variabilelor ecuația se scrie $\frac{Y'(x)}{Y^2(x) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$, iar integrala generală este $\operatorname{arctg} Y(x) - \operatorname{arctg} x = C$.

TESTUL 220

1. a) $y = \sqrt[3]{x^2 + C}$. b) Separînd variabilele se obține: $\frac{x}{x^2 + 1}$ $- \frac{yy'}{y + 1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - y + \ln|y + 1| = C$. Dacă se pune constanta sub forma $\ln|C|$ soluția se mai scrie: $\frac{Ce^y}{y + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$. c) Cum $y'' = 1 \Rightarrow y' = x + C_1 \Rightarrow y =$ $= \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$. d) Se obține: $y' = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow y =$ $= \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$. e) $y' = \sin x + C_1 \Rightarrow y = -\cos x +$ $+ C_1 x + C_2$.

2. a) Este o ecuație diferențială liniară de ordinul I neomogenă de forma: $y' + P(x)y = Q(x)$, unde $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Metoda I. Se face schimbarea $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$, iar ecuaţia se scrie: $u'v + uv' + \frac{1}{x} uv = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}$, dar $v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x|$ adică $v = \frac{1}{x} \Rightarrow u'.\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow u' = \sin x \Rightarrow u = -\cos x + C$. În final rezultă

$$y = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$$

Metoda II. Se ştie că soluţia generală a unei ecuaţii liniare de ordinul I neomogene este $y = e^{-\int P(x)dx} \cdot$

$$\cdot\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} \cdot dx + k\right] \text{ adică } y = e^{-\int\frac{dx}{x}} \cdot$$

$$\cdot\left[\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int\frac{dx}{x}} + k\right].$$

Deoarece $e^{\ln x} = x$ şi $e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$ rezultă soluţia căutată. b) Este o ecuaţie de acelaşi tip:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}} dx + k\right].$$

Integrala $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ nu se poate exprima cu ajutorul funcţiilor elementare şi calculul ei se face prin metode numerice (vezi testul 214). c) Notăm $y = uv$ şi se obţine:

$$x(u'v + uv') = (x + 1)uv + x^2 - x^3 \Leftrightarrow xu'v + uv'x -$$
$$-(x + 1)v = x^2 - x^3 \Rightarrow xv' - (x + 1)v = 0;\ v = xe^x.$$

În continuare $u'(1 - x)e^{-x} \Rightarrow u = xe^{-x} + C$. Soluţia este $y = uv = xe^x(xe^{-x} + C) = x^2 + Cxe^x$. Ecuaţia se putea rezolva şi aplicînd direct formula. d) Se poate proceda şi

astfel: se integrează mai întîi ecuația omogenă atașată $xy' +$ $+ y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow y =$ $= \frac{C}{x}$. Pentru a integra ecuația neomogenă se folosește metoda variației constantei. Avem: $y = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow y' =$ $= -\frac{C}{x^2} + \frac{C'}{x}$. Înlocuind în ecuația dată și efectuînd calculele rezultă $-\frac{C}{x^2} + \frac{1}{x}C' + \frac{C}{x^2} - x \sin x = 0 \Rightarrow C' =$

$$= x^2 \sin x \Rightarrow C(x) = \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x +$$

$+ 2x \sin x + 2 \cos x + C_1$. Deci soluția generală este:

$$y = \frac{1}{x}(2 \cos x + 2x \sin x - x^2 \cos x + C).$$

TESTUL 221

Toate ecuațiile sînt ecuații diferențiale liniare de ordinul I.

TESTUL 222

Ecuațiile diferențiale sînt liniare de ordinul II omogene cu coeficienți constanți.

1. Se caută soluții de forma $y = e^{rx}$. Atunci $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$ care înlocuite în ecuație conduc la ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $r_1 = 1$ și $r_2 = -1$. Soluțiile $y_1 = e^x$ și $y_2 = e^{-x}$ sînt soluții particulare ale ecuației diferențiale omogene și sînt liniar independente. Soluția generală a ecuației este o combinație liniară a celor două soluții particulare, adică $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. **2.** Ecuația caracteristică este $r^2 - 3r + 2 = 0$ și are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, deci integrala generală va fi: $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

3. Soluţia generală este: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-6x}$. **4.** $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$. **5.** Ecuaţia caracteristică are rădăcina dublă $r_1 = r_2 = 1$, deci soluţia generală va fi de forma $y = (C_1 + xC_2)e^{x}$. **6.** Soluţia generală a ecuaţiei este $y = (C_1 + xC_2)e^{-5x}$. **7.** Ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe $r_1 = -i$, $r_2 = +i$. Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcinile $r_1 = \alpha + i\beta$ şi $r_2 = \alpha - i\beta$, atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. În cazul de faţă $\alpha = 0$, $\beta = 1$ şi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **8.** Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sînt

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ şi } r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

iar soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right].$$

9. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este:

$$y = e^{-\frac{3}{2}x}\left[C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x\right].$$

TESTUL 223

1. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= 0 \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 \sin \frac{\pi}{2} + C_2 \cos \frac{\pi}{2} = -2 \Rightarrow C_1 = 2.$$

Deci soluţia particulară care satisface condiţiile iniţiale este $y = 2 \cos x$.

TESTUL 224

Ecuațiile diferențiale sînt liniare de ordinul II, cu coeficienți constanți neomogene. Soluția generală a unei astfel de ecuații este $y_G = y_0 + y_p$, unde y_0 este soluția generală a ecuației omogene atașate, iar y_p este o soluție particulară a ecuației neomogene. Așadar, rezolvarea unei astfel de ecuații comportă două etape: în prima etapă se rezolvă ecuația omogenă atașată, iar în etapa a doua se caută o soluție particulară a ecuației neomogene.

Pentru determinarea soluției particulare se aplică în general metoda variației constantelor a lui *Lagrange*, iar în unele cazuri cînd membrul drept este de o anumită formă particulară, se poate determina o soluție particulară și altfel.

În cele ce urmează, pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene se va utiliza a doua metodă.

1. Se scrie ecuația omogenă atașată: $y'' - 2y' + y = 0$ a cărei soluție generală este $y_0 = (C_2 + xC_2)e^x$. Dacă membrul drept al ecuației este de forma $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, unde $P(x)$ este un polinom, atunci ecuația admite o soluție particulară de forma $y_p = x^k Q(x)e^{\alpha x}$, unde $Q(x)$ este un polinom de același grad cu $P(x)$; dacă numărul α nu este rădăcină a ecuației caracteristice $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, atunci $k = 0$ și dacă α este rădăcină, atunci k este egal cu ordinul de multiplicitate al rădăcinii.

În cazul de față se caută o rădăcină particulară de forma $y_p = Ax + B$, unde A și B sînt constante ce se vor determina.

Se calculează $y_p' = A$ și $y_p'' = 0$ și înlocuind în ecuația avem $y_p'' - 2y_p' + y_p = x + 1$ adică $-2A + Ax + B = 1 + x \Rightarrow A = 1$ și $B = 3$. Deci soluția particulară este $y_p = x + 3$. Deci soluția generală a ecuației este $y_G = (C_1 + C_2x)e^x + (x + 3)$.

2. Se procedează ca mai sus și se caută soluția particulară, de forma, $y_p = Ax^2 + Bx + C$. **3.** Ecuația caracteristică a ecuației omogene atașată este $r^2 - 2r + 2 = 0$. Atunci soluția generală a ecuației omogene atașate este

$$y_0 = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right).$$ Se caută soluția particulară

sub forma $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. În continuare rezultă: $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y'' = 6Ax + 2B$ Înlocuind

în ecuație se obține: $6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 2x^3 - 4x^2 + 6x + 2 \Leftrightarrow 2Ax^3 + (2B - 6A)x^2 + (2C - 4B + 6A)x + 2D - 4C + 2B = 2x^3 - 4x^2 + 6x + 2 \Rightarrow A = 1,\ B = 1,\ C = 2,\ D = 2$. Deci $y_p = x^3 + x^2 + 2x + 2$ și soluția generală a ecuației este:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right) + x^3 + x^2 + 2x + 2.$$

4. Rădăcinile ecuației caracteristice sînt $r_1 = 1$ și $r_2 = 3$, deci soluția ecuației omogene atașate este $y_p = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Aici $P(x) = 3$, $\alpha = 2$. Cum $\alpha = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, atunci k este 0. Deci se caută soluția particulară de forma $y_p = Ae^{2x}$. Se procedează ca mai sus și rezultă $A = -3$, deci $y_p = -3e^{2x}$. Soluția generală este $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 3e^{2x}$.

5. Aici $\alpha = 1$, este rădăcină a ecuației caracteristice, deci $k = 1$ și atunci se caută soluția particulară de forma $y_p = x(Ax + B)e^x$. După efectuarea calculelor rezultă $y_p = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$ și în consecință soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x.$$

6. Ecuația caracteristică are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = 2$, deci $\alpha = 2$ este rădăcina dublă a ecuației caracteristice și atunci $k = 2$. Se caută soluția particulară de forma $y_p = x^2(Ax + B)e^{2x}$ etc. **7.** Se caută soluția particulară sub forma $y_p = x(Ax + B)e^x$.

TESTUL 225

Dacă membrul drept al ecuației este de forma $f(x) = a\cos qx + b\sin qx$ și numerele $\pm iq$ nu sînt rădăcini ale ecuației caracteristice se caută soluția particulară de forma $A\cos qx + B\sin qx = y_p$.

În cazul în care numerele $\pm iq$ satisfac ecuația caracteristică se caută soluția particulară de forma $y = x(A\cos qx + B\sin qx)$.

1. Ecuația caracteristică are rădăcinile $r_{1,2} = -2 \pm 3i$. Soluția generală a ecuației omogene atașate este $y_0 = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Deoarece $\pm 2i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, se caută soluția particulară de forma $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x$ și atunci $y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$, $y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$. Înlocuind în ecuație se obține: $-4 \cos 2x - 4 B \sin 2x - 8A \sin 2x + 8B \cos 2x + 13A \cos 2x + 13B \sin 2x = 5 \sin 2x$, de unde rezultă $-8A + 9B = 5$ și $9A + 8B = 0$. Deci soluția particulară este $y_p = -\frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x$, iar soluția generală a ecuației este:

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

2. Soluția generală a ecuației omogene este

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Dacă $n \neq \omega$ se caută soluție particulară de forma $y_p = A \cos nx + B \sin nx$ și rezultă soluția generală a ecuației propuse $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{Q}{\omega^2 - n^2} \sin nx$.

Dacă $n = \omega$ soluția particulară este de forma $y_p = x(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$ și soluția generală a ecuației propuse este $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x - \frac{Q}{2\omega} \cos \omega x$.

4. Dacă membrul drept al ecuației este de forma $f(x) = e^{\alpha x}[P_1(x) \cos qx + P_2(x) \sin qx]$, iar numerele $\alpha \pm iq$ nu sînt rădăcini ale ecuației caracteristice atunci soluția particulară se caută de forma $y_p = e^{\alpha x}[R_1(x) \cos qx + R_2(x) \sin qx]$ unde $R_1(x)$ și $R_2(x)$ sînt polinoame de grad egal cu max [grad $P_1(x)$; grad $P_2(x)$]. Dacă numerele $\alpha \pm iq$ sînt rădăcini ale ecuației caracteristice, atunci se caută soluția particulară de forma $y_p = xe^{\alpha x}[R_1(x) \cos qx + R_2(x) \sin qx]$.

În cazul exercițiului 4, ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$. Cum $\alpha = 0$ și $q = 1$, rezultă că numărul $\alpha + iq = 0 \pm i$ este rădăcină a ecuației caracteristice. Deci se caută soluția particulară de forma $y_p = x[(Ax + B) \cos x + (A_1 x + B_1) \sin x]$. Soluția generală a ecuației propuse este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\sin x - x \cos x)$.

5. Se caută o soluție particulară de forma $y_p = (a_0x^2 + a_1x + a_2)\cos x + (b_0x^2 + b_1x + b_2)\sin x$. Înlocuind în ecuație se obține $y_p = (2x - 1)\cos x + (x^2 + 1)\sin x$. În final rezultă soluția generală a ecuației

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + (2x - 1)\cos x + (x^2 + 1)\sin x.$$

TESTUL 226

1. a) Soluția generală a ecuației omogene este $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Considerînd pe C_1 și C_2 funcții de x se obține sistemul:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(\cos x - \sin x) + C_2'(x)(\sin x + \cos x) = x\cos x. \end{cases}$$

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}x\sin 2x \text{ și } C_2'(x) = \frac{x}{2}(1 + \cos 2x).$$

Integrînd se obține:

$$C_1 = \frac{1}{8}(2x\cos x - \sin 2x + K_1) \text{ și}$$

$$C_2 = \frac{1}{8}(2x\sin 2x + \cos 2x + 2x + K_2).$$

Deci soluția generală este:

$$y = e^x\left[\frac{1}{4}x^2\sin x + \frac{1}{4}x^2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{K_1}{8}\cos x + \frac{\sin x}{8}\right](K_2 - 1).$$

b) Soluția generală a ecuației omogene atașate este $y^* = e^{2x}(C_1x + C_2)$ și în continuare se procedează ca mai sus.

TESTUL 227

I.1. Numitorul lui u_n fiind suma unei progresii geometrice rezultă că $u_n = \dfrac{(x^n+1)(x-1)}{x^{n+p}-1} \Rightarrow f(x) = 1-x$ dacă $x \in (0, 1)$ şi $f(x) = \dfrac{x-1}{x^p}$ dacă $x \in (1, +\infty)$. Deci

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pentru } x \in [0, 1] \\ \dfrac{x-1}{x^p} & \text{pentru } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

2. $f'_s(1) = -1$, $f'_d(1) = 1$. (C_0) este graficul funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ \dfrac{x-1}{x^0} & \text{pentru } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

(C_1) este graficul funcţiei $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ \dfrac{x-1}{x} & \text{pentru } x \in [1, +\infty) \end{cases}$

(C_2) este graficul funcţiei $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ \dfrac{x-1}{x^2} & \text{pentru } x \in [1, +\infty) \end{cases}$

3. Cum $x_M = 2 \Rightarrow S_0 = 1$, $S_1 = \dfrac{3}{2} - \ln 2$, $S_2 = \ln 2$.

II. Din continuitatea funcţiei f pe intervalul $[0, +\infty)$ rezultă continuitatea funcţiilor $t^2 f(t)$ şi $tf(t)$ pe orice interval $[a, x]$ cu $(a > 0)$, deci aceste funcţii sînt şi integrabile şi $\int_a^x t^2 f(t)\mathrm{d}t = H(x) - H(a)$ cu $H'(x) = x^2 f(x)$, iar $\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$ unde $G'(x) = xf(x)$. Deci $F(x) = \dfrac{H(x) - H(a)}{G(x) - G(a)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{x f(x) \int_a^x t\, f(t)(x-t)\mathrm{d}t}{[G(x) - G(a)]^2} \geqslant 0.$$

III. 1. Ecuația se mai scrie:

$$3y^2y' = (3x^2 - 7x - 15)e^{3x} \Leftrightarrow 3y^2y' = (3x^2 - 7x - 15)e^{3}$$

$$\Rightarrow y^3 = (x+1)(x-4)e^{3x} + C,\ x \in R.$$

2. Pentru $x = 4$ trebuie să rezulte $y = 0$, de unde $C = 0$. Soluția particulară căutată este:

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(x-4)} \cdot e^{x},$$ cu mulțimea de definiție R.

TESTUL 228

I.1. Funcția este $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \in [0,\ 1) \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = 1 \\ 1 & \text{pentru } x \in (1,\ +\infty) \end{cases}$

2. Funcția este $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in [0,\ 3) \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = 3 \\ 0 & \text{pentru } x \in (3,\ +\infty) \end{cases}$

3. Funcția se scrie $f(x) = \begin{cases} -x & \text{pentru } x \in (-\infty,\ -1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{pentru } x = -1 \\ 0 & \text{pentru } x \in (-1,\ 1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{pentru } x = 1 \\ x & \text{pentru } x \in (1,\ +\infty) \end{cases}$

Funcția este discontinuă în punctele -1 și 1.

II. $I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{6x - 9x^2}\,dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - (3x-1)^2}\,dx$ și

apoi se face substituția $3x - 1 = \sin t$ etc.

Se spune că o funcție $f : [a,\ b],\ a < b$ are proprietatea lui *Darboux*, dacă oricare ar fi numărul $\lambda \in (f(a),\ f(b))$, există un punct $\mu \in (a,\ b)$ astfel încît $f(\mu) = \lambda$.

Se știe că orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui *Darboux*. Funcțiile f, g, h sînt continue pe domeniile lor de definiție. **1.** Cum $f(-1) = 1$ și $f(0) = -1$ înseamnă că funcția trebuie să ia toate valorile intermediare din intervalul $(-1, 0)$, deci există un punct $\mu \in (-1, 0)$ astfel ca $f(\mu) = 0$. Analog se procedează și pentru funcțiile de la punctele **2** și **3**.

IV. Ecuația se mai scrie:

$$(y' - xy)(y' + 2y) = 0 \Leftrightarrow y' - xy = 0 \text{ sau } y' + 2y = 0 \Rightarrow$$

$y_1 = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}$ sau $y_2 = C_2 e^{-2x}$, adică fiecare din funcțiile y_1 sau y_2 este o soluție a ecuației inițiale.

TESTUL 229

I. Se observă că $f(x) = \sqrt{(x+5)(x-1)} - \dfrac{1}{|x+2|-3}$

sau explicitînd

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x+5)(x-1)} - \dfrac{1}{x-1} & \text{pentru } x \in (1, +\infty) \\ \sqrt{(x+5)(x-1)} + \dfrac{1}{x+5} & \text{pentru } x \in (-\infty, -5). \end{cases}$$

Funcția este continuă și derivabilă pe tot domeniul său de definiție. Pentru a afla intersecția graficului funcției cu axa OX trebuie să se separe cu ajutorul șirului lui *Rolle* rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

Pentru $x \in (1, +\infty)$ ecuația este $(x-1)\sqrt{(x+5)(x-1)} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^3(x+5) = 1$, ecuație care are o rădăcină reală $x_1 \in (1, 2)$.

Pentru $x \in (-\infty, -5)$ ecuația este $(x+5)\sqrt{(x+5)(x-1)} = 1 \Leftrightarrow (x+5)^3(x-1) = 1$, ecuația are o rădăcină reală $x_2 \in (-6, -5)$. Tabloul de variație este:

x	$-\infty$	-6	x_2	-5	1	x_1	$+\infty$
$f'(x)$			$-$			$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

II. Fie punctele $M(x,\ 0)$, $N(0,\ y)$ și $D(a,\ b) \Rightarrow$ distanța $MN = MD + DN \Rightarrow f(x,\ y) = \sqrt{(a-x)^2+b^2} + \sqrt{a^2+(b-y)^2}$. ($\alpha$)

Punctele M, D și N fiind coliniare rezultă $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$. ($\beta$)

Din relațiile (α) și (β) avem $f(x) = \frac{x}{x-a}\sqrt{b^2+(a-x)^2}$.

Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x = a + \sqrt[3]{ab^2}$ și $y = b + \sqrt[3]{a^2b} \Rightarrow f_{minim} = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^{3/2}$. Aplicația numerică $d_{minim} = 46{,}8$ km.

III. a) Ținînd seama de interpretarea geometrică a teoremei lui *Lagrange*, problema revine la a aplica formula creșterilor finite pe intervalul $[1,\ 2]$. Funcția se mai scrie sub forma:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 - x + 2 & \text{pentru } x \in (-\infty,\ -2) \\ x - 2 & \text{pentru } x \in [-2,\ -1] \\ \dfrac{-x+2}{2x+1} & \text{pentru } x \in \left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right) \\ \dfrac{2x^2+x-2}{2x+1} & \text{pentru } x \in [1,\ +\infty) \end{cases}$$

b) Pe intervalul $[1,\ 2]$ funcția este continuă și este derivabilă pe $(1,\ 2)$. Deci există un punct $x_0 \in (1,\ 2)$ astfel încît $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(x_0)$ deci $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $y_0 = f(x_0)$, iar ecuația tangentei este $y - y_0 = m(x - x_0)$, unde $m = f'(x_0)$.

TESTUL 230

I.1. a) Deoarece $x^{1-\frac{1}{\ln x}} = \frac{x}{e}$, pentru $\left|\frac{x}{e}\right| \leqslant 1$, se studiază funcția $f(x) = \arcsin\frac{x}{e}$.

b) Pentru verificare se înlocuiesc în ecuația diferențială expresiile derivatelor.

c) Cum $F(x) = \int \arcsin\frac{x}{e}\,dx$ se pune condiția ca $F(e) = \frac{\pi e}{2}$ și rezultă constanta de integrare egală cu zero.

d) Se face substituţia

$$y' = z \Rightarrow z^2 = \frac{1}{C - x^2} \Rightarrow y' = \pm \frac{1}{\sqrt{C - x^2}},$$

$$y = \pm \arcsin \frac{x}{\sqrt{C}} + C_1.$$

2. a) Deoarece $\ln : (0, +\infty) \to R$, rezultă că:

$(f' \circ \ln) : (0, +\infty) \to [1, +\infty) \Rightarrow f' : R \to [1, +\infty)$.

b) Se obţine $f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } t \in (-\infty, 0] \\ e^t & \text{dacă } t \in (0, +\infty). \end{cases}$

c) Se integrează $f'(t)$ obţinîndu-se:

$$f(x) = \begin{cases} x + C_1 & \text{pentru } x \in (-\infty, 0] \\ e^x + C_2 & \text{pentru } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Din condiţia $f(0) = 1$ rezultă $C_1 = 1$. Pentru determinarea constantei C_2, se ţine seama de faptul că funcţia f este derivabilă în origine, deci şi continuă. În final se obţine:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ e^x & \text{dacă } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

II. Se observă că: a) funcţia este continuă pe $[100, 104]$; b) este derivabilă pe $(100, 104)$. Deci există un punct $c \in (100, 104)$ astfel încît:

$$\frac{\sqrt{104} - \sqrt{100}}{104 - 100} = \frac{1}{2\sqrt{c}},$$

$$\sqrt{104} - 10 < \frac{4}{2\sqrt{c}} < \frac{2}{\sqrt{100}} = 0{,}2.$$

TESTUL 231

I.1. Relaţia din enunţ se mai scrie: $f(n+2) = 2f(n+1) + \frac{8f(n)}{2n-1}$. Pentru $n = 0$, $f(2) = 12 = 3 \cdot 2^2$; pentru $n = 1$, $f(3) = 40 = 5 \cdot 2^3$; **2.** Se presupune că $f(n) = (2n - 1) \cdot 2^n$

şi se demonstrează că $f(n+1) = (2n+1)\cdot 2^{n+1}$, astfel: se ştie că $f(n+1) = 2\cdot f(n) + \dfrac{8f(n-1)}{2n-3} = 2\cdot(2n-1)\cdot 2^n + \dfrac{8(2n-3)\cdot 2^{n-1}}{2n-3} = (2n-1)2^{n+1} + 2^3\cdot 2^{n-1} = (2n+1)\cdot 2^{n+1}$.

3. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = -1 + 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \ldots + (2n-3)\cdot 2^{n-1} + (2n-1)\cdot 2^n$; $-2S_n = 2 - 1\cdot 2^2 - 3\cdot 2^3 - 5\cdot 2^4 \ldots - (2n-3)\cdot 2^n - (2n-1)\cdot 2^{n+1} \Rightarrow S_n - 2S_n = -S_n = -1 + 2\cdot 2^{n+1} - 2^2 - (2n-1)\cdot 2^{n+1} \Rightarrow S_n = 5 + (2n-3)\cdot 2^{n+1}$.

4. Rezultă că $b_n = (2n-3)\cdot 2^{n+1}$. a) Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 2$ (Vezi testul 157).

b) $$\lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{\frac{b_{n+1}}{2b_n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{\frac{2n-1}{2n-3}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^k \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n-3}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{pentru } k = 1 \\ \infty & \text{pentru } k > 1. \end{cases}$$

II. Se observă că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt{n^2+k^2}}\right)^3 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\right)^3 = \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(\sqrt{1+x^2})^3} \text{ etc.}$$

III. Pentru $m \leqslant 1 \Rightarrow I = \displaystyle\int_1^3 \frac{x}{x-m+1}\,dx$.

Pentru

$$1 < m < 3 \Rightarrow I = \int_1^m \frac{x\,dx}{-x+m+1} + \int_m^3 \frac{x\,dx}{x-m+1}.$$

Pentru $3 < m \Rightarrow I = \displaystyle\int_1^3 \frac{x\,dx}{-x+m+1}$.

TESTUL 232

I.1. $a = 1;\ b = -17;\ c = 4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{4x^4 - 17x^2 + 4}$.

2. $x \in R \setminus \left\{-2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 2\right\}$, graficul admite asimptote dreptele: $y = 0$, $x = -2$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$; $x = 2$;

$f'(x) = \dfrac{-2x(4x^4 + 8x^2 - 21)}{(4x^4 - 17x^2 + 4)^2}$. Fiindcă $f(-x) = f(x)$ se poate trasa graficul pe $[0, +\infty)$ ținînd seama de simetria funcției.

$$\mathbf{3.}\ A = -\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}} \frac{x^2 + 1}{4x^4 - 17x^2 + 4}\,dx =$$

$$= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}} \frac{x^2 + 1}{(2x-1)(2x+1)(x-2)(x+2)}\,dx = \frac{1}{12}\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}} \left(\frac{2}{2x-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x-2}\right) dx \text{ etc.}$$

Pentru calculul integralei se mai poate scrie:

$$\frac{x^2 + 1}{4x^4 - 17x^2 + 4} = \frac{1 + \dfrac{1}{x^2}}{4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 17}$$

și se face substituția

$$x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)', \text{ iar } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

etc.

II. Dacă $f(x) = 0$ ar avea limită în punctul $x = 0$, ar însemna că există un număr l astfel ca pentru orice șir $x_n \neq 0$, $x_n \to 0$ să avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$. Fie două șiruri $x_n' = \dfrac{1}{2n\pi}$ și $x_n'' = \dfrac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}$ cum $x_n' \to 0$, $x_n'' \to 0$, dar $\lim f(x_n') = +\infty$, iar $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n'') = 0$ și rezultă că funcția nu are limită.



III. Dacă $f(x) = \ln(1 + x^2)$ și $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Funcțiile f și g satisfac condițiile teoremei lui *Cauchy* pe intervalul $[x, 1]$, cu $x \geqslant \frac{1}{2}$. Aplicînd teorema lui *Cauchy* $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1 + x^2) - \ln 2}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}} = 2C > 1 \quad \text{unde} \quad C \in (x, 1). \text{ Dar}$$

pentru $x \in (0, 1) \Rightarrow \ln(1 + x^2) - \ln 2 \leqslant \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}$.

TESTUL 233

1. a) Vectorii sînt liniar independenți.

b) Dacă ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sînt coordonatele unui vector, în baza e_1, e_2, e_3, e_4, iar η_1, η_2, η_3, η_4 sînt coordonatele aceluiași vector în baza x_1, x_2, x_3, x_4. atunci:

$$\eta_1 = \frac{1}{27}(15\xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3 + 8\xi_4)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{27}(7\xi_1 - 2\xi_3 + 6\xi_3 - 3\xi_4)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{27}(-30\xi_1 + 23\xi_2 - 10\xi_3 + 16\xi_4)$$

$$\eta_4 = \frac{1}{27}(21\xi_2 - 6\xi_2 + 7\xi_3 - 9\xi_4)$$

2. a) Este o ecuație liniară omogenă și are soluția generală

$$y = ax + \frac{C}{\ln x};$$

b) Este o ecuație liniară neomogenă și are soluția generală

$$y = e^{-\sin x}\left[\int e^{2x + \sin x}\, dx + K\right].$$

3. a) Dacă y_1, y_2, y_3 sînt integrale particulare ale ecuației atunci:

$$\begin{cases} y_1' - y_2' + P(x)(y_1 - y_2) = 0 \\ y_1' - y_3' + P(x)(y_1 - y_3) = 0 \end{cases}$$ sau $d \ln (y_1 - y_2) = d \ln (y_1 - y_3) \Rightarrow y_1 - y_2 = C(y_1 - y_3)$.

b) Relația $y_1 - y_2 = C(y_1 - y_3)$ este echivalentă cu relația

$$M_1M_2 = C \cdot M_1M_3 \text{ pentru orice } x \Rightarrow \frac{M_1M_2}{M_1M_3} = \frac{M_1'M_2'}{M_1'M_3'}.$$

c) Dacă $x' \to x$ dreptele M_iM_i' devin tangente la curbele date. Ecuațiile tangentelor sînt:

$$Y - y_1 = y_1'(X - x), \quad Y - y_2 = y_2'(X - x)$$

$$X = x - \frac{y_2 - y_1}{y_2' - y_1'}, \qquad Y = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_2' - y_1'}$$

$$X = x + \frac{1}{P}, \qquad Y = \frac{Q}{P}.$$

III. TESTE DE TRIGONOMETRIE PLANĂ

III.1. VECTORI ÎN PLAN

TESTUL 234

1. Fie în plan punctele O, A, B, C, D, E.

a) Să se arate că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA}$ (în O) $= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ (în O).

b) Să se construiască vectorii:

$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}$ (în O)

$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OB}$ (în A)

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OB}$ (în B)

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CD}$ (în C).

c) Dacă $\overrightarrow{OE} \sim \overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{EB} \sim \overrightarrow{CD}$ să se construiască vectorii:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$ (în O)

$\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AE}$ (în B).

d) Presupunînd punctele A, B, C necoliniare, iar punctele D şi E astfel încît $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$, iar $\{0\} = BD \cap CE$ să se exprime vectorii $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CE}$ şi $\overrightarrow{AO}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

e) În condiţiile punctului d) să se arate că dreapta AO este mediană în triunghiul ABC.

TESTUL 235

I. Fie A, B, C trei puncte necoliniare și punctele $M \in BC$, $N \in AC$, $P \in AB$.

1) Considerînd că $|AP| \equiv |BP|$; $|BM| \equiv |MC|$; $|CN| \equiv |NA|$ se cere:

a) Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ în funcție de $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB}$.

b) Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 0$

c) Oricare ar fi punctul O din planul (ABC) există relația:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

2) Considerînd că $|BM| \equiv k \cdot |BC|$; $|CN| \equiv k \cdot |CA|$; $|AP| \equiv k \cdot |AB|$; $k \neq 0$, arătați că propoziția de la punctul c) este adevărată.

II. Pe laturile unui patrulater $ABCD$ se consideră punctele $M \in |AB|$, $N \in |BC|$ $P \in |CD|$, $Q \in |DA|$ astfel încît $\overrightarrow{MB} = (a + \lambda)\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NB} = (b - \lambda)\ \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DQ} = (b + \lambda)\overrightarrow{DA}$ și $\overrightarrow{DP} = (c - \lambda)\overrightarrow{DC}$, unde a, b, c sînt constante reale, iar λ este un parametru real variabil. Să se arate că vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ}$ are o mărime constantă cînd λ variază.

TESTUL 236

I. Se dau punctele $A(1, 2)$; $B(-2, 3)$; $C(-1, -3)$.

a) Să se determine componentele vectorilor $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ unde M, N, P sînt respectiv mijloacele segmentelor $|BC|$, $|AC|$ și $|AB|$.

b) Să se determine componentele vectorului $\vec{u} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$.

c) Considerînd punctele D și E pe dreapta BC astfel ca $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB} = -5\overrightarrow{EC}$ să se arate că: $2\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ și $6\overrightarrow{OE} = 5\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$.

d) Fie F şi G două puncte care verifică relaţiile: $2\overrightarrow{FA} - 5\overrightarrow{FB} = \vec{0}$, $3\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Să se arate că: $7\overrightarrow{OF} = 5\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$ şi $7\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$.

Să se determine componentele vectorului $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG}$.

II. Se consideră vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ care au normele $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$; $\|\vec{c}\| = 3$ şi măs $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 30°$; măs$\widehat{(\vec{a}, \vec{c})} = 45°$; măs$(\vec{b}, \vec{c}) = 60°$. Să se calculeze produsele scalare: $(\vec{a} \cdot \vec{b})$; $(\vec{a} \cdot \vec{c})$ şi $(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

III. Fie $|AB|$ şi $|CD|$ două coarde perpendiculare într-un cerc cu centrul în O şi fie I punctul lor de intersecţie. Să se arate că $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IO}$.

TESTUL 237

I. Fie vectorii: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j}$. Să se determine:

1) Normele vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

2) Lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe cei doi vectori.

3) Produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

4) Valoarea lui $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

5) Lungimea proiecţiei ortogonale a vectorului $\vec{a}$ pe suportul vectorului $\vec{b}$.

II. Se dau vectorii: $\vec{a} = x\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{b} = 3\sqrt{3}\,\vec{i} + 2\sqrt{3}\,\vec{j}$. $\vec{c} = (-2 - 3\sqrt{3})\,\vec{i} + z\vec{j}$.

1) Să se determine valoarea lui x astfel încît $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2) Să se afle valoarea lui z, pentru x determinat la punctul 1) dacă $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

3) Să se calculeze $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$ și apoi din condițiile de mai sus să se deducă $\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}})$.

TESTUL 238

I. Latura $|BC|$ a triunghiului ABC este împărțită în 5 părți egale de punctele B_1, B_2, B_3, B_4. Se unesc aceste puncte cu vîrful A al triunghiului dat.

a) Să se găsească expresiile vectorilor $\overrightarrow{B_1A}$; $\overrightarrow{B_2A}$; $\overrightarrow{B_3A}$ și $\overrightarrow{B_4A}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ și $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

b) Presupunînd că $\hat{A} \equiv$ dr și $\|\vec{c}\| = 16$ dm, $\|\vec{a}\| = 12$ dm să se calculeze $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2} + \overrightarrow{AB_3} + \overrightarrow{AB_4} + \overrightarrow{AC}\|$.

II. Dîndu-se vectorii $\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$; $\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$, folosind produsul scalar al celor doi vectori să se demonstreze inegalitatea:

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

(I-b și II, din subiectul pentru lucrarea scrisă cl. IX-a, București, 1976).

III. Fie piramida $V[ABCD]$ cu baza pătratul $ABCD$ și fie O punctul de intersecție al diagonalelor bazei. Să se arate că este adevărată relația: $\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD} = 4\overrightarrow{VO}$.

TESTUL 239

I. Fie triunghiul ABC și M, N, P respectiv mijloacele laturilor $|BC|$; $|CA|$; $|AB|$.

a) Cunoscînd vectorii de poziție $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ ai mijloacelor laturilor triunghiului dat în raport cu un punct oarecare din plan O, să se exprime vectorii de poziție ai vîrfurilor triunghiului.

b) Să se arate că oricare ar fi punctul O din plan este valabilă relația vectorială: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

II. Două forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ au același punct de aplicație și au mărimile $\|\vec{F}_1\| = 3$ și $\|\vec{F}_2\| = 4$, iar $(\widehat{\vec{F}_1, \vec{F}_2}) = \frac{\pi}{3}$. Să se determine mărimea rezultantei $\vec{R}$.

III. Fiind dați vectorii $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ și $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, în ce caz $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$ și ce reprezintă fiecare din cele două părți ale egalității?

III.2. FUNCȚII TRIGONOMETRICE

TESTUL 240

I. Să se stabilească mulțimea maximă de definiție (domeniul de definiție) pentru funcția:

$$F(t) = \sin\left(\frac{t}{2} + 3\right) - 3\cos\left(3 - \frac{2t}{5}\right) + \frac{2t - 1}{\sin t} + \frac{3 - \operatorname{tg} t}{\operatorname{ctg} t}.$$

II. Să se stabilească mulțimea valorilor următoarelor funcții:

a) $F : R \to \square$ definită prin relația: $F(t) = 2\sin\left(\frac{3t}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 3.$

b) $F : R \to \square$ definită prin relația $F(t) = \frac{2}{5} + 3\cos(2t - 6).$

c) $F : R \to \square$ definită prin relația $F(t) = 3 \cdot$

$$\cdot \left|\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right| - 2.$$

III. Să se stabilească perioadele principale pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = \sin 5x$

b) $f(x) = \cos \frac{x}{7}$

c) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$

d) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$

e) $f(x) = \sin\left(\frac{5x}{3} - 4\right)$

f) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

g) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{5x}{4}$

h) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{5} + \frac{3\pi}{2}\right)$

i) $f(x) = \sin 3x - \operatorname{tg} 12x$

k) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \cos x.$

TESTUL 241

I. Să se stabilească perioadele principale ale funcțiilor:

a) $f_1(x) = 5 \sin \frac{3x}{2} - 4 \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

b) $f_2(x) = \cos 2x - 2 \sin \frac{x}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f_3(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \operatorname{tg} 3x$

d) $f_4(x) = \cos \frac{x}{3} - \frac{2}{5} \operatorname{tg}\left(\frac{x-4}{3} + \pi\right) + 4 \operatorname{ctg} 2x -$

$$- 3 \operatorname{tg}\left(\frac{4x}{3} - \frac{\pi}{8}\right).$$

II. Să se completeze tabelul de mai jos:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
0						
$\frac{\pi}{6}$						
$\frac{\pi}{4}$						
$\frac{\pi}{3}$						
$\frac{\pi}{2}$						
$\frac{2\pi}{3}$						
$\frac{3\pi}{4}$						
$\frac{5\pi}{6}$						
π						
$\frac{7\pi}{6}$						
$\frac{5\pi}{4}$						
$\frac{4\pi}{3}$						
$\frac{3\pi}{2}$						
$\frac{5\pi}{3}$						
$\frac{7\pi}{4}$						
$\frac{11\pi}{6}$						
2π						

TESTUL 242

I. Să se arate că dacă triunghiul ABC este dreptunghic ($\hat{A} \equiv$ dr) atunci există relațiile:

1) $\sin \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b^2}{ac}$.

2) $\sin \hat{B} + \cos \hat{B} = \sin \hat{C} + \cos \hat{C}$.

3) $(1 + \cos \hat{B})(1 + \cos \hat{C}) = \frac{2p^2}{a^2}$.

4) $\frac{\sin \hat{B} + \cos \hat{C}}{\cos \hat{B} + \sin \hat{C}} = \operatorname{tg} \hat{B}$.

5) $\operatorname{cosec} \hat{B} + \operatorname{ctg} \hat{B} = \frac{a+c}{b} = \frac{b}{a-c}$.

[s-au făcut notațiile: $a = d(B, C)$; $b = d(A, C)$; $c = d(A, B)$].

II. Să se scrie sub o formă mai simplă expresiile:

1) $E(t) = \cos^3\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) \cdot \left[1 - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)\right] - \sin^3\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \cdot \left[1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\right]$, pentru $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2) $E = \frac{\left(a^3 \sin \frac{\pi}{2} - \frac{b^3}{\cos \pi}\right)\left(2a^2 \sin \frac{5\pi}{6} + ab \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} - b^2 \sin \frac{3\pi}{2}\right)}{\left(a^3 \cos 2\pi - a \cdot b^2 \sin \pi + b^3 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}\right)\left(ab \cos \pi + 2a^2 \sin \frac{\pi}{6} - b^2 \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}\right)}$.

unde $a \in R$, $b \in R$, $a \neq b$, $a \neq 0$.

III. Să se calculeze expresiile:

1) $E = \frac{\cos(-2820°) \cdot \operatorname{tg} 1290° \cdot \sin(-4380°) \cdot \sec 1575° \cdot \operatorname{ctg} 3375°}{\operatorname{cosec}(-4470°) \cdot \operatorname{ctg} 3465° \cdot \sec 2385° \cdot \sin 225° \cdot \operatorname{tg}(-2760°)}$.

2) $E = \frac{\cos^3(-148°) + \sin^2(-212°) \cos 302°}{\sin(-148°)\sin 392° - \sin 148° \cdot \sin 58° + \sin(-58°) \cos(-32)°}$.

TESTUL 243

I. Să se studieze paritatea următoarelor funcții:

a) $f : R \setminus \left\{k \frac{\pi}{2}\right\} \to R$ definită prin $f(x) =$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} x - 3x \cos x}{\sin 2x}.$$

b) $g : R \setminus \left\{k \frac{\pi}{2}\right\} \to R$ definită prin $g(x) =$

$$= \frac{\operatorname{ctg}^4 x - \cos x + |x|}{\sin x - 5 \operatorname{tg} x}.$$

c) $h : R \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$ definită prin $h(x) =$

$$= \frac{\operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x - \sin^2 x}{\cos x + 6 \operatorname{tg}^3 x}.$$

II. Să se traseze graficele următoarelor funcții:

a) $f(x) : \sin x + |\sin x|$;

b) $f(x) = \sin x - |\sin x|$;

c) $f(x) = \sin \frac{3x}{2}$;

d) $f(x) = \cos \frac{4x}{5}$;

e) $f(x) = \operatorname{tg} 4x$;

f) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$;

g) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{2x}{3}$.

III. Să se determine semnul următoarelor expresii:

1) $E = \sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{7}$.

2) $E = \sin \frac{17\pi}{10} - \sin \frac{7\pi}{4}$.

3) $E = \cos \frac{3\pi}{5} - \cos \frac{5\pi}{8}$.

4) $E = \cos \frac{47\pi}{5} - \cos \frac{19\pi}{2}$.

5) $E = \operatorname{tg} \frac{6\pi}{5} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$.

6) $E = \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{9\pi}{5}$.

TESTUL 244

I. 1) Dacă $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ se cere să se calculeze tg α; tg β; cos β; ctg α; ctg β; dacă $\sin\beta = -\frac{3}{5}$ și $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

2) Dacă $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și tg $\alpha = \frac{3}{2}$, ctg $\beta = -\frac{9}{40}$ să se calculeze sin α, sin β, cos α, cos β, ctg α, tg β.

II. Se dă tg x + ctg $x = a$. Să se exprime în funcție de a expresiile: $E_1 = \text{tg}^2\, x + \text{ctg}^2\, x$ și $E_2 = \text{tg}^3\, x + \text{ctg}^3\, x$.

III. Să se demonstreze egalitățile:

1) $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = (\sec x - \text{tg}\, x)^2$, $x \in R \setminus \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$;

2) $1 + \sin x + \cos x + \text{tg}\, x = (1 + \cos x)(1 + \text{tg}\, x)$, $x \in R \setminus \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$.

3) $$\left[\frac{(1 + \text{ctg}\, x)^2 - (1 + \text{tg}\, x)^2}{(1 + \text{ctg}\, x)^2 + (1 + \text{tg}\, x)^2}\right]^2 + \left(\frac{\text{ctg}\, x}{1 + \text{ctg}^2 x} + \frac{\text{tg}\, x}{1 + \text{tg}^2 x}\right)^2 = 1;$$

$$x \in R \setminus \left[\left\{k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{k\pi - \frac{\pi}{4}\right\}\right].$$

TESTUL 245

I. Dacă ecuația $x^2 + px + q = 0$; $p \in R$; $q \in R$; are rădăcinile $x_1 = \text{tg}\, \alpha$ și $x_2 = \text{tg}\, \beta$, se cere să se calculeze în funcție de p și q expresia: $E = \sin^2(\alpha + \beta) + p\sin(\alpha + \beta)\cdot\cos(\alpha + \beta) + q\cos^2(\alpha + \beta)$.

II. Dacă măs $\hat{A} = 15°$; măs $\hat{B} = 75°$; măs $\hat{C} = 105°$ se cer valorile funcțiilor $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$, $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{ctg} B$, $\sin C$, $\cos C$, $\operatorname{tg} C$, $\operatorname{ctg} C$.

III. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\sin(u+v)\cos(u-v) - \sin(u-v)\cos(u+v)}{\cos(u+v)\cos(u-v) + \sin(u-v)\sin(u+v)}$$

este independentă de u.

IV. Să se arate că expresia: $E = \dfrac{\sin^2(u+v) - \sin^2(u-v)}{\cos^2(u+v) - \cos^2(u-v)}$ este independentă de u și v.

TESTUL 246

I. Dacă se notează $t = \sin 2u$, se cere să se exprime în funcție de t următoarele expresii:

$E_1 = (\sin u + \cos u)^2$ $\qquad E_2 = \operatorname{tg} u + \operatorname{ctg} u$

$E_3 = \operatorname{tg}^2 u + \operatorname{ctg}^2 u$ $\qquad E_4 = \operatorname{tg}^3 u + \operatorname{ctg}^3 u$

$E_5 = \sin^4 u + \cos^4 u$ $\qquad E_6 = \sin^6 u + \cos^6 u$.

II. Dacă $u \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\sin u = \dfrac{4}{5}$; se cere să se calculeze: $\sin 2u$, $\cos 2u$, $\operatorname{tg} 2u$, $\sin 3u$, $\cos 3u$, $\operatorname{tg} 3u$, $\operatorname{ctg} 3u$.

III. Dacă $u \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; $v \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg} u = \dfrac{1}{7}$; $\operatorname{tg} v = \dfrac{1}{8}$, se cere să se calculeze $\operatorname{tg}(u + 2v)$.

IV. a) Să se exprime $E = \dfrac{1 + \alpha(\sin^4 u + \cos^4 u)}{\sin^6 u + \cos^6 u}$ în funcție de $a = \sin 2u$, iar apoi să se exprime și în funcție de $t = \operatorname{tg} u$.

b) Să se arate că există $\alpha \in R$, astfel încît expresia E să fie independentă de u.

V. Să se arate că expresia: $E = \dfrac{\sin^2(u+v) - \sin^2(u-v)}{\sin 2u \sin 2v}$ este independentă de u și v.

III.3. IDENTITĂŢI TRIGONOMETRICE

TESTUL 247

Să se demonstreze identităţile de mai jos:

1) $$\frac{\sin(u+v)-\sin u-\sin v}{\sin(u-v)-\sin u+\sin v}=-\frac{\sin\dfrac{u+v}{2}}{\sin\dfrac{u-v}{2}}$$

2) $$\frac{\sin u+\sin 3u+\sin 5u+\sin 7u+\sin 9u}{\cos u+\cos 3u+\cos 5u+\cos 7u+\cos 9u}=\operatorname{tg} 5u$$

3) $$\frac{\sin(u+v)\cos u-\sin u\cos(u+v)}{\cos(u+v)\cos u+\sin(u+v)\cos u}=\operatorname{tg} v.$$

4) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x=2\sin 2x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$

5) $\cos x-\sin 2x+\cos 3x=4\cos x\sin\left(\frac{\pi}{4}-\right.$

$\left.-\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$

6) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos 2x+\cos 4x+$

$+\cos 6x=6\cos x\cos 2x\cos 3x.$

7) $\sin 5x-\cos 4x-\sin x+1=4\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}-\right.$

$\left.-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$

TESTUL 248

I. Să se demonstreze identitatea: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=$

$=-\frac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\operatorname{tg}3\alpha.$

II. Să se exprime în funcţie de $t=\operatorname{tg}\frac{u}{2}$ expresia:

$$E=\sqrt{\frac{1-\cos u}{2(1+\sin u)}}+\sqrt{\frac{5+3\sin u+4\cos u}{2-2\cos u}}.$$

III. Să se demonstreze identitatea:

$$\sin x \sin 3x - \cos 5x \cos 7x + \sin 3x \cos 5x - \sin 2x = -4 \sin 4x \sin 5x \cos 2x.$$

IV. Să se rezolve ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ ai cărei coeficienţi sînt: 1) $a = \sin^2 u$, $b = -2(1 - \cos u \cos v)$, $c = \sin^2 v$.

2) $a = \sin u + \sin v$, $b = -2(\cos u + \cos v)$, $c = -\sin u - \sin v$.

TESTUL 249

Să se demonstreze că dacă $A + B + C = \pi$ atunci există relaţiile:

1) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

2) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \cos C$.

3) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

4) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$.

5) $\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$.

6) $\frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin B + \sin C + \sin A} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

7) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$.

8) $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1$.

TESTUL 250

I. Dacă $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ să se demonstreze egalităţile:

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \sin C$.

b) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$.

II. Dacă $A+B=C$ să se demonstreze relația:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=1.$$

III. Să se demonstreze că dacă $\cos(A+B)=0$ atunci are loc relația:

$$\sin(A+2B)=\sin A.$$

IV. Să se demonstreze că dacă $\sin(2A+B)=3\sin B$ atunci are loc identitatea:

$$\operatorname{tg}(A+B)=2\operatorname{tg} A.$$

V. Să se demonstreze că dacă $A+B+C+D=2\pi$ atunci:

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} D=$$

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A+C)\sin(A+D)}{\sin A\sin B\sin C\sin D}.$$

TESTUL 251

I. Să se scrie sub o formă algebrică expresiile:

1) $\sin(\arccos x)$; $\sin(\operatorname{arctg} x)$; $\sin(\operatorname{arcctg} x)$, $\cos(\arcsin x)$; $\cos(\operatorname{arctg} x)$; $\cos(\operatorname{arcctg} x)$, $\operatorname{tg}(\arcsin x)$; $\operatorname{tg}(\arccos x)$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$, $\operatorname{ctg}(\arcsin x)$; $\operatorname{ctg}(\arccos x)$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

2) $\sin(3\operatorname{arctg} x)$; $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

II. Să se calculeze expresiile:

$E_1=\sin(\alpha+\beta)$; $E_2=\cos(\alpha+\beta)$; $E_3=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ știind

$$\text{că } \alpha=\arcsin\frac{3}{5} \text{ și } \beta=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right),$$

$$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \beta\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right).$$

III. Să se demonstrez identitățile:

1) $\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$.

2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$.

3) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

4) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b + \operatorname{arctg} c = \operatorname{arctg} \frac{a + b + c - abc}{1 - ab - bc - ac}$.

IV. Să se stabilească domeniul maxim de definiție al funcției:

$$f(x) = \arcsin \frac{3x - 1}{2} + \arccos \frac{3x - 1}{x^2 + 1} - \operatorname{arctg} \frac{2x}{x - 1} + \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2x + 1}.$$

III.4. ECUAȚII TRIGONOMETRICE

TESTUL 252

I. Să se scrie soluțiile ecuațiilor de mai jos, mai întîi soluțiile particulare ($\alpha \in [0, 2\pi]$) și apoi soluțiile generale.

$\sin x = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin x = 1$; $\sin x = a$, unde $a \in [0, 1]$; $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = -1$; $\sin x = b$

pentru $b \in [-1, 0]$; $\cos x = 1$; $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $\cos x = 0$; $\cos x = a$

pentru $a \in [0, 1]$; $\cos x = -1$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = b$ pentru $b \in [-1, 0]$; $\operatorname{tg} x = 0$;

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg} x = 1$; $\operatorname{tg} x = a$ unde $a \in$

$\in [0, \infty)$; $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg} x = -1$;

$\operatorname{tg} x = b$ unde $b \in (-\infty, 0)$; $\operatorname{ctg} x = 0$; $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg} x = 1$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg} x = a$ pentru $a \in (0, \infty)$;

$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} x = -1$;

$\operatorname{ctg} x = b$ unde $b \in (-\infty, 0)$.

II. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin x = \sin 3x$.

b) $\sin x = -\sin 3x$.

c) $\cos x = \cos \frac{x}{2}$.

d) $\sin 2x = \cos 3x$.

e) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$.

f) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} 2x$.

g) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 2x$.

h) $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} 2x$.

i) $\sin x + \cos x = 0$.

j) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.

k) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 0$.

l) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$.

m) $\sin x + \cos x = -1$.

TESTUL 253

Să se rezolve ecuațiile trigonometrice de mai jos:

1) $\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$;

2) $\cos 2x = \cos x + 1$;

3) $\cos 6x - 6 \cos 3x + 5 = 0$;

4) $\cos 4x + 8 \sin 2x - 7 = 0$;

5) $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

6) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$;

7) $\cos 2x - \cos 3x = \cos 6x - \cos 5x$;

8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

TESTUL 254

I. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$;

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$;

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$;

d) $\frac{\sin^2 x}{\cos 2x + 2} = -|\sin x|$.

II. Fie funcția:

$$f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}.$$

a) Să se arate că poate fi scrisă sub forma:

$f(x) = A \sin(\alpha + x)$, unde A este o constantă, iar $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) Să se arate că: $\frac{f(x)}{f(-x)} = \operatorname{tg} mx + \sec mx$; $m \in N$.

c) Să se rezolve ecuația: $f(x) + (2 + \sqrt{3})f(-x) = 0$.

TESTUL 255

Să se rezolve următoarele ecuații trigonometrice:

1) $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$.

2) $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$.

3) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$.

4) $8 \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

5) $8 \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$.

6) $\arcsin(1 - x) = \arccos(1 + x)$.

7) $2 \arcsin x = \arccos 2x$.

8) $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \dfrac{1}{8}$.

III.5. APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

Dacă ABC este un triunghi, în acest paragraf se vor nota:

— unghiurile triunghiului cu A, B, C.

— raza cercului circumscris cu R; — raza cercului înscris cu r;

— lungimile laturilor: $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$, $c = d(A, B)$

— perimetrul $2p = a + b + c$.

TESTUL 256

I. Să se arate că într-un triunghi ABC, oarecare, sînt adevărate relațiile de mai jos:

1) $a = \dfrac{p \sin \dfrac{A}{2}}{\cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}}$; 2) $b = \dfrac{p \sin \dfrac{B}{2}}{\cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{C}{2}}$;

3) $c = \dfrac{p \sin \dfrac{C}{2}}{\cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2}}$;

4) $d(A, A') = \dfrac{c \sin B}{\cos \dfrac{B-C}{2}}$, unde $|AA'|$, este bisectoarea unghiului A.

II. Lungimile laturilor unui triunghi, sînt proporționale cu numerele 1; $\sqrt{3}$; 2. Se cere să se determine unghiurile triunghiului.

III. Fie un trapez isoscel $ABCD$ ($AD \| BC$), în care se cunosc: măs $\widehat{ADB}$ = măs $\widehat{DBC} = \beta$, măs $\widehat{ABD} = \alpha$ și lungimea diagonalei $|BD|$ egală cu a. Se cere să se calculeze lungimile laturilor trapezului în funcție de a, α și β.

TESTUL 257

I. Să se arate că triunghiul ABC, între elementele căruia există una din relațiile de mai jos, este dreptunghic:

1. $\operatorname{ctg} \dfrac{C}{2} = \dfrac{a+b}{c}$; 2. $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{b+c}$.

II. Fie un triunghi ABC, oarecare. Să se arate că între elementele sale există relațiile:

1) $\sin \dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{a} \cos \dfrac{A}{2}$

2) $b \cos C - c \cos B = \dfrac{b^2 - c^2}{a}$

3) $\sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{4R}$

4) $b \cos^2 \dfrac{C}{2} + c \cos^2 \dfrac{B}{2} = c \cos^2 \dfrac{A}{2} + a \cos^2 \dfrac{C}{2} =$

$$= a \cos^2 \frac{B}{2} + b \cos^2 \frac{A}{2}.$$

III. Să se arate că triunghiul ABC, între elementele căruia există relația $c^2 \operatorname{ctg} \dfrac{C}{2} = 4S$, este isoscel.

TESTUL 258

I. Să se arate că dacă între elementele unui triunghi ABC există una din relațiile de mai jos, triunghiul este isoscel.

1) $a = 2b \cos C$,

2) $\sin A = 2 \sin B \cos C$,

3) $a = 2b \sin \frac{A}{2}$,

4) $(p - b) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}$,

5) $a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a + b) \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}$.

II. Între unghiurile triunghiului ABC (măs $\hat{A} >$ măs $\hat{C}$) există relația: $\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$. Se cere:

1) Să se arate că relația dată este echivalentă cu relația $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$.

2) Să se scrie relația pe care o verifică laturile triunghiului.

3) Să se calculeze $\cos 2B$ și măs $\hat{B}$, dacă $\sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

4) Să se calculeze $\cos \frac{A - C}{2}$ și să se arate că se pot determina toate unghiurile.

(I.P., București)

TESTUL 259

I. Fie un triunghi ABC, în care lungimile laturilor verifică relația: $2a^2 = b^2 + c^2$. Să se arate că:

1) măs $\hat{A} < \frac{2}{3}$ dr.

2) este adevărată relația $\cos 2A + \cos A \cos(B - C) = 0$.

II. Fie triunghiul ABC oarecare. Se cere să se transforme în produs expresia:

$$E = \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^2 \frac{C}{2}}.$$

III. Fie triunghiul ABC. Să se arate că relația:

$\sin A + \sin C = 2 \sin B$, implică relația $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

IV. Să se arate că triunghiul ABC, între elementele căruia există relațiile $2a = b + c$ și 2 măs $A =$ măs $B +$ măs C, este echilateral.

TESTUL 260

Să se precizeze cum este triunghiul ABC, între elementele căruia există una din relațiile:

1) $\sin C = \cos A + \cos B$.

2) $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$.

3) $b\left(1 + \operatorname{ctg} \dfrac{B}{2}\right) = c\left(1 + \operatorname{ctg} \dfrac{C}{2}\right)$.

4) $\sin^2 A = \sin 2B \sin 2C$.

5) $b = (a - c)\left(\dfrac{1}{\sin B} + \operatorname{ctg} B\right)$.

6) $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$.

7) $\cos A + \cos B = \sin C$.

8) $\operatorname{tg} B = \dfrac{\cos(C - B)}{\sin A + \sin(C - B)}$.

TESTUL 261

I. Să se arate că, dacă între elementele triunghiului ABC, există relația, $2a = b + c$, atunci există și relațiile:

1) $2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B - C}{2}$.

2) $$\frac{\cos \frac{B - C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} - \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B - C}{2}} = \frac{3}{2}.$$

(I.P., Galați)

II. Fie un romb $ABCD$. Dacă lungimea laturii sale este medie proporțională între lungimile diagonalelor, se cere să se calculeze unghiurile rombului.

III. Fie un triunghi dreptunghic ABC (măs $A = 90°$), a cărui arie este S și $d(B, C) = a$. Se cere să se calculeze lungimile catetelor triunghiului.

III.6. APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN ALGEBRĂ

TESTUL 262

Se știe că fiecărui număr real $t \in R$ i se poate asocia numărul complex $e^{it} = \cos t + i \sin t$, de modul egal cu unu.

a) Să se deducă formulele $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ și

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

b) Folosindu-se formulele de la punctul 1) se cere să se demonstreze următoarele formule cunoscute:

1) $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

2) $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$.

6) $2 \cos^2 t = 1 + \cos 2t$.

7) $2 \sin^2 t = 1 - \cos 2t$.

3) $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t.$

8) $\operatorname{tg} t = \frac{1}{i} \frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}}.$

4) $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1.$

9) $\sin t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}.$

5) $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t.$

10) $\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}.$

TESTUL 263

I. Deoarece numărul complex $e^{it} = \cos t + i \sin t$, pentru orice $t \in R$ are modulul egal cu unu, legea prin care fiecărui număr real t i se asociază numărul complex e^{it} este o aplicație a mulțimii numerelor reale la mulțimea numerelor complexe de modul egal cu unitatea. Uneori această aplicație se notează exp t. Folosind notația $\exp t = e^{it}$ se cere:

1) Să se calculeze $\exp t$ pentru următoarele valori ale lui t:

$$t = 0,\ t = \frac{3\pi}{4};\ t = \frac{2\pi}{3};\ t = \pi,\ t = \frac{3\pi}{2},\ t = \frac{7\pi}{4}.$$

2) Să se demonstreze că pentru orice $t \in R$ au loc relațiile: $\exp(t + 2\pi) = \exp t$; $\exp(t + \pi) = -\exp t$;

II. Folosind formula lui *Moivre* să se exprime $\sin 4t$, $\sin 5t$, $\sin 6t$ în funcție de $\sin t$ și $\cos 4t$, $\cos 5t$, $\cos 6t$ în funcție de $\cos t$.

TESTUL 264

I. Să se determine $t \in [0, 2\pi]$ pentru care expresia $E = [e^{it}]^4 \cdot e^{-it}$ aparține numerelor reale.

II. Folosind formula trigonometrică a unui număr complex se cere să se determine arg z pentru numerele:

1) $z = 1 + i.$ 2) $z = 1 - i.$

3) $z = -1 + i.$ 4) $z = -1 - i.$

5) $z = \sqrt{3} + i$. 6) $z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

III. Să se determine $|z|$ și arg z pentru:

1) $z = \cos\alpha + \sin\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha)$.

2) $z = \sin\alpha + i(1 + \cos\alpha)$, $(\alpha \in R)$

3) $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

TESTUL 265

I. Fie numărul complex $z = \frac{1 - \alpha i}{1 + \alpha i}$. Să se arate că oricare ar fi $\alpha \in R$, modulul numărului este egal cu 1.

II. Folosind formula $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$, să se scrie sub o formă mai simplă expresia:

$$E = (\cos t + i\sin t)[\cos(t + t_1) + i\sin(t + t_1)][\cos(t + 2t_1) + i\sin(t + 2t_1)].$$

III. Dacă $z = |z| e^{i \arg z}$, este cunoscută formula:

$$z^n = |z|^n \cdot e^{in \arg z}.$$

Se cere să se calculeze:

1) $(\sqrt{3} + i)^{60}$. 2) $\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{18}$.

3) $(-1 + i)^{24}$. 4) $(1 + i)^4$.

TESTUL 266

Să se calculeze rădăcinile de ordinele 2, 3 și 4 din numerele complexe de mai jos:

1) $z = \sqrt{3} - i$. 2) $z = i$.

3) $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4) $z = -i$.

5) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$. 6) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

TESTUL 267

Să se rezolve ecuaţiile de mai jos:

1) $z^3 - 1 + i = 0$.

2) $z^8 + (1 - i)\, z^4 - i = 0$.

3) $\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = e^{it}$; $(n \in N)$.

4) $(1 + ix)^n - (1 - ix)^n = 0$; $(n \in N$ şi $x \in R)$.

III. 7. TESTE RECAPITULATIVE DE TRIGONOMETRIE PLANĂ

TESTUL 268

I. 1) Să se demonstreze identitatea:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{2\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)};$$

$$\alpha \in R,\ \beta \in R,\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \neq 0.$$

2) Folosind rezultatul de la punctul precedent să se calculeze $E = \operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 81° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63°$.

II. Să se calculeze expresia: $E = \sin 15° \cos 105° \operatorname{tg} 75°$

III. Să se demonstreze identităţile:

1) $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + \ldots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x - $

$$- \operatorname{ctg} x = - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x.$$

2) $\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2^2 x} + \dfrac{1}{\sin 2^3 x} + \ldots + \dfrac{1}{\sin 2^n x} =$

$$= \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

TESTUL 269

I. Să se arate că $\sin\left[4 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3}\right] = \cos\left[2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{7}\right]$.

II. Să se calculeze $z^n + \dfrac{1}{z^n}$ ştiind că $z + \dfrac{1}{z} = 2 \cos t$; $t \in R$.

III. Să se rezolve ecuațiile:

1) $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x.$

2) $3\cos^2 x-\sin^2 x-\operatorname{tg} x=0.$

IV. Să se rezolve ecuațiile:

1) $\dfrac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}=0$

2) $\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{ctg} x}=0$

3) $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin\dfrac{\pi}{3}=A^5_{2x+4}$

TESTUL 270

I. Fiind date funcțiile

$$F(x)=\frac{1}{2}-\cos x;\qquad x\in[0,\pi];$$
$$G(x)=\sin x-\cos x,$$

cere:

1) Să se rezolve inecuația $F(x)>0.$
2) Să se studieze semnul lui $G(x).$
3) Să se rezolve inecuația $\sqrt{F(x)}\geq G(x).$

4) Să se rezolve ecuația $\sin 2x-\cos 2x=\dfrac{1}{2};\ x\in R.$

(I.P., Timișoara)

II. Să se rezolve ecuația:

$$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+$$
$$+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

III. 1) Să se determine $x \in [0, 2\pi]$ pentru care există egalitatea:

$$(\cos t + i \sin t)(\cos 2t + i \sin 2t)(\cos 3t + i \sin 3t)(\cos 3t - i \sin 3t) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Dacă t este valoarea obținută la punctul precedent se cere să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \mathrm{tg}\frac{t}{2} + \mathrm{ctg}\frac{t}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2} + \mathrm{ctg}^2\frac{t}{2} + \mathrm{tg}^3\frac{t}{2} + \mathrm{ctg}^3\frac{t}{2}.$$

TESTUL 271

I. Să se rezolve ecuațiile:

1) $2\cos\frac{x}{4} = 3^x + 3^{-x}$

2) $\mathrm{tg}^2\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)} = 2$

3) $2\,|\sin x| + \sin^2 x + 3x^2 + 8x^{16} = 0$

II. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{\cos x}\left[\frac{1}{2} - \cos x\right] + \log_{\frac{1}{2} - \cos x} \cos^2 x - 3 = 0.$$

III. Să se reprezinte grafic funcția: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$.

TESTUL 272

I. Să se calculeze $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{arctg}\frac{1}{k^2 + k + 1}$.

II. Fie funcția $f(x) = \min_{x \in R} [\cos x \,\mathrm{sign}\,(\sin x);\ \sin x \cdot \mathrm{sign}(\cos x)]$, unde sign x este funcția signum (vezi testul 14)

Se cere:

a) Să se arate că f este o funcție periodică și să i se determine perioada

b) Să se traseze graficul funcției $f(x)$.

TESTUL 273

I. Fie funcția:

$f(x) = (1 - 2\cos\alpha)x^2 + 2x\sin\alpha + 8\cos\alpha$, cu $x \in R$, $\alpha \in R$.

1) Să se determine valorile lui α astfel ca pentru $\frac{1}{5} < \cos\alpha < \frac{1}{3}$ să fie adevărată inegalitatea $f(x) > 0$, $(\forall) x \in R$.

2) Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, să se arate că expresia $E = 16(x_1^2 + x_2^2) - 3x_1^2 x_2^2$ nu depinde de α.

3) Să se identifice valorile lui α pentru care funcția dată admite un minim sau un maxim și să se calculeze aceste valori.

(Fac. de matematică, Iași)

II. 1) Să se demonstreze că:

$\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$.

$\cos(3 \arccos x) = 4x^3 - 3x$.

$\cos(4 \arccos x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

$\cos(7 \arccos x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$.

2) Să se arate că $P(x) = \cos(n \arccos x)$ este un polinom de gradul n în x. (Aceste polinoame poartă numele matematicianului *Cebîșev* și au proprietăți remarcabile.)

III. 8. INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

TESTUL 234

I. d) Se notează $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Rezultă că $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ (în A) $= \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - 2\vec{u}$; $\overrightarrow{CE} = \vec{u} - 2\vec{v}$. Pentru exprimarea vectorului $\overrightarrow{AO}$ se procedează

astfel: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + k\cdot\overrightarrow{BD} = \vec{u} + k(\vec{v} - 2\vec{u})$ sau $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AC} + l\cdot\overrightarrow{CE} = \vec{v} + l(\vec{u} - 2\vec{v})$ unde $k, l \in R$. Egalînd cele două expresii ale vectorului $\overrightarrow{AO}$ rezultă $k = \frac{1}{3}$ și $l = \frac{1}{3}$. Deci $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$. e) Fie punctul M mijlocul segmentului $|BC| \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$ și cum $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$ rezultă că $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

TESTUL 235

I. 1) Fie $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{AB} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\vec{u} - 2\vec{v})$, iar $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\vec{v} - 2\vec{u})$.

2) Deoarece $\overrightarrow{AP} = k\cdot\overrightarrow{AB}$ rezultă $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM} = k\cdot\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + k\cdot\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{CN} = k\cdot\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + k\cdot\overrightarrow{CA}$. Însumînd se obține: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$ și ținînd seama că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ rezultă relația cerută.

II. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{CD}(1 - c + \lambda)$; $\overrightarrow{MB} = (\lambda - b)\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD}(1 - b - \lambda) \Rightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{AB}(a + \lambda - 1) + \overrightarrow{BC}(1 + \lambda - b) + \overrightarrow{CD}(1 - c + \lambda) + \overrightarrow{DA}(b - 1 + \lambda)$ și se ține seama că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

TESTUL 236

I. Se știe că, dacă P este un punct în planul vectorilor $\vec{i}, \vec{j}$ (doi versori ortogonali avînd originea într-un punct O) notația $P(x, y)$ va însemna că x și y sînt componentele vectorului de poziție $\overrightarrow{OP}$, deci $\overrightarrow{OP} \sim x\vec{i} + y\vec{j}$.

a) $M\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; $N\left(0, -\frac{1}{2}\right)$; $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$. c), d) și e) Se știe că $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$ (în O) $= \overrightarrow{OC}$ etc.

II. Se aplică definiția produsului scalar a doi vectori.

III. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}$ (în I); $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}$ (în I); $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OC}$ (în I) $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OD}$ (în I). Deci
$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\,\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Se arată că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OI}$.

TESTUL 237

I. 1) Se știe că $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ unde $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

2) Diagonalele paralelogramului format reprezintă suma, respectiv diferența celor doi vectori.

II. 1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Dar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3(x - 2)\sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = 2$. Rezultă că $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\sqrt{3}\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$.

2) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{0}.\vec{i} + (b - 3 + 2\sqrt{3})\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow z = 3 - 2\sqrt{3}$. Deci se poate scrie $\vec{c} = (-2 - 3\sqrt{3})\vec{i} + (3 - 2\sqrt{3})\vec{j}$.

3) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\|}$. Rezultă $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = -\frac{1}{2}$, de unde măs $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = 120°$ sau măs $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = 240°$. Ținînd seama că $\vec{a} \perp \vec{b}$ rezultă măs $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$ și deci $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 150°$.

TESTUL 238

I. a) $\overrightarrow{B_1A} = -\vec{c} - \frac{1}{5}\vec{a}$; $\overrightarrow{B_2A} = -\vec{c} - \frac{2}{5}\vec{a}$; $\overrightarrow{B_3A} = -\vec{c} - \frac{3}{5}\vec{a}$; $\overrightarrow{B_4A} = -\vec{c} - \frac{4}{5}\vec{a}$.

b) Fie A' mijlocul ipotenuzei $|BC| \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$ (în A) $= \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_4} = \overrightarrow{AB_2} + \overrightarrow{AB_3}$. Deci norma sumei va fi

$$3\,\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2} = 60 \text{ dm}.$$

Altfel, se putea folosi rezultatul de la punctul a).

II. $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = a_1a_2 + b_1b_2$ (căci $\vec{i} \perp \vec{j}$ și $\|\vec{i}\| = 1$; $\|\vec{j}\| = 1$), sau conform definiției $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$. Se știe că $|\cos\alpha| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \leqslant 1$ etc.

TESTUL 239

I. a) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NA}$; $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PB}$; $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \vec{p} - \vec{m} = \vec{a} - \vec{n}$; $\vec{m} - \vec{n} = \vec{b} - \vec{p}$ și $\vec{n} - \vec{p} = \vec{c} - \vec{m}$, de unde rezultă: $\vec{a} = \vec{n} + \vec{p} - \vec{m}$; $\vec{b} = \vec{p} + \vec{m} - \vec{n}$ și $\vec{c} = \vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$.

b) Se folosesc relațiile $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ etc., apoi se efectuează suma produselor scalare obținute.

III. Rezultă $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; deci $\vec{a} \perp \vec{b}$. Fiecare termen se reduce la pătratul diagonalei dreptunghiului cu laturile $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

TESTUL 240

I. $t \in R \setminus \left\{k \frac{\pi}{2}\right\}$. **II.** Se ține seama de faptul că sin: $:R \to [-1, 1]$; cos: $R \to [-1, 1]$ și rezultă: a) $F : R \to [-7, -3]$; b) $F : R \to \left[-2\frac{3}{5}, 3\frac{2}{5}\right]$; c) $F : R \to [-2, 1]$.

III. Funcțiile sinus și cosinus sînt funcții periodice; $T = 2\pi$, iar funcțiile tangentă și cotangentă au perioada $T = \pi$. a) $f(x + T) = \sin(5x + 5T) \Rightarrow 5T = 2\pi$, de unde rezultă $T = \frac{2\pi}{5}$. e) $T = \frac{6\pi}{5}$. g) $T = \frac{4\pi}{5}$. h) $T = \frac{5\pi}{2}$. i) $f(x+T) = \sin(3x + 3T) - \text{tg}(12x + 12T) \Rightarrow 3T = 2k\pi$ și $12T = l\pi$. Deci rezultă că $T = \frac{2k\pi}{3} = \frac{l\pi}{12}$, egalitate verificată pentru $k = 1$ și $l = 8 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$. k) $f(x+T) = \cos(x+T) \cdot \text{ctg}(x + T) \Rightarrow T = 2\pi$.

TESTUL 241

I. a) $T = 12\pi$. b) $T = 12\pi$. c) $T = 3\pi$. d) $T = 6\pi$.

II. Dacă $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ atunci se știe că: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$, $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}(\pi - \alpha) = -\text{ctg}\,\alpha$.

TESTUL 242

I. Se ține seama de faptul că $\hat{B} + \hat{C} \equiv 1\text{dr}$, iar $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right) = \cos\hat{B} \Rightarrow \sin\hat{C} = \cos\hat{B}$ etc.

II. 1) $E = \sin t + \cos t$. 2) $E = \frac{a+b}{a-b}$.

III. 1) $E = -\frac{\sqrt{6}}{24}$. 2) $E = \cos 32° - \sin 32°$.

TESTUL 243

I. O funcție f definită pe intervalul simetric $[a, b]$ este pară, dacă $f(-x) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in [a, b]$ și este impară dacă $f(-x) = -f(x)$ pentru $(\forall)$ $x \in [a, b]$. Funcțiile sinus, tangentă și cotangentă sînt funcții impare, iar funcția cosinus este funcție pară. Dintre funcțiile propuse funcția f este pară, funcția g este impară, iar funcția h nu este nici pară nici impară. **II.** Înainte de reprezentarea grafică, se stabilește perioada fiecăreia dintre funcții.

III. 1) Cum $\frac{\pi}{7} > \frac{\pi}{8}$ și $\frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ interval pe care funcția sinus este strict crescătoare rezultă că $\sin\frac{\pi}{8} < \sin\frac{\pi}{7}$ și deci $E < 0$.

TESTUL 244

I. Se folosesc formulele: $\sin u = \pm\sqrt{1 - \cos^2 u}$;

$$\sin u = \frac{\operatorname{tg} u}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}}; \quad \sin u = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 u}};$$

$$\cos u = \pm\sqrt{1 - \sin^2 u}; \quad \cos u = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}};$$

$$\cos u = \frac{\operatorname{ctg} u}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 u}}.$$

II. Ridicînd la pătrat egalitatea dată se obține:
$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = a^2$ sau $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a^2 - 2$. Deci $E_1 = a^2 - 2$. Ridicînd apoi la cub egalitatea dată se obține $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x + 3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = a^3 \Rightarrow E_2 = a(a^2 - 3)$.

III. 1) Se amplifică fracția cu $1 - \sin x$. 2) Se mai scrie:
$$1 + \cos x + \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = (1 + \cos x) + \sin x \frac{1 + \cos x}{\cos x}.$$

TESTUL 245

I. Ținînd seama de formulele $\sin^2 u = \frac{\operatorname{tg}^2 u}{1 + \operatorname{tg}^2 u}$ și $\cos^2 u = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 u}$ expresia se mai poate scrie:

$$E = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + p \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + q}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}.$$

Conform relațiilor dintre rădăcini și coeficienți rezultă că: $x_1 + x_2 = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = -p$ și $x_1 x_2 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = q$, de unde se obține $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{-p}{1 - q}$.

II. Se ține seama că $75° = 45° + 30°$; $15° = 45° - 30°$; $105° = 60° + 45°$ și se folosesc formulele: $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$; $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$; $\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$; $\operatorname{ctg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} v \mp 1}{\operatorname{ctg} v \pm \operatorname{ctg} u}$.

TESTUL 246

I. $E_1 = 1 + t$. $E_2 = \frac{1}{\sin u \cos u} = \frac{2}{t}$. $E_3 = \operatorname{tg}^2 u + \operatorname{ctg}^2 u = (\operatorname{tg} u + \operatorname{ctg} u)^2 - 2$. $E_4 = (\operatorname{tg} u + \operatorname{ctg} u)^3 - 3(\operatorname{tg} u + \operatorname{ctg} u)$. $E_5 = [(\sin^2 u + \cos^2 u)^2 - 2 \sin u \cos u]^2 - 2 \sin^2 u \cos^2 u$, iar $\sin^2 u \cos^2 u = \frac{t^2}{4}$.

II. Se ține seama de formulele: $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$; $\cos 2u = 1 - 2 \sin^2 u$; $\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$; $\operatorname{ctg} 2u = \frac{\operatorname{ctg}^2 u - 1}{2 \operatorname{ctg} u}$; $\sin 3u = \sin u(3 - 4 \sin^2 u)$; $\cos 3u = \cos u(4 \cos^2 u - 3)$; $\operatorname{tg} 3u = \frac{3 \operatorname{tg} u - \operatorname{tg}^3 u}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 u}$; $\operatorname{ctg} 3u = \frac{\operatorname{ctg}^3 u - 3 \operatorname{ctg} u}{3 \operatorname{ctg}^2 u - 1}$.

III. Se calculează mai întîi $\operatorname{tg} 2v$.

TESTUL 247

1) Dacă în formula $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ se face $2\alpha = u + v$ rezultă că $\sin(u+v) = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$.

2) Se grupează în mod convenabil termenii de la numărător şi respectiv de la numitor şi se aplică formulele $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ şi $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

5) Se scrie $(\cos x + \cos 3x) - \sin 2x = 2\cos 2x\cos x - 2\sin x\cos x = 2\cos x(\cos 2x - \sin x) = 2\cos x\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin x\right]$.

6) Se cunoaşte formula $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ şi rezultă că $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$ etc.

7) Membrul stîng se scrie succesiv: $\sin 5x - \sin x + 1 - \cos 4x = 2\sin 2x\cos 3x + 2\sin^2 2x = 2\sin 2x(\cos 3x + \sin 2x) = 2\sin 2x\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sin 2x\right]$ etc.

TESTUL 248

I. Se foloseşte formula: $\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = \frac{\sin(u+v)}{\cos u\cos v}$.

II. Se utilizează formulele:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

III. Se ține seama de formulele: $\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)]$; $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) + \cos(u+v)]$; $\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$.

IV. 1) Discriminantul ecuației este $\Delta = 4(\cos u - \cos v)^2$ și rezultă $x_1 = \dfrac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}}$; $x_2 = \dfrac{\cos^2 \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}}$. 2) Discriminantul ecuației este $\Delta = 4\cos^2 \frac{u-v}{2}$ și se obțin rădăcinile: $x_1 = \operatorname{ctg} \frac{u+v}{4}$, $x_2 = -\operatorname{tg} \frac{u+v}{4}$.

TESTUL 249

1) Se mai pot scrie:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C =$$

$$= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} =$$

$$= 1 + 2 \sin \frac{C}{2}\left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right) \text{ etc.}$$

2) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = \dfrac{1 + \cos 2A}{2} + \dfrac{1 + \cos 2B}{2} -$

$$- \cos^2 C = 1 - \cos C \cos(A - B) - \cos^2 C =$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos C)] \text{ etc.}$$

5) După ce se aduce la acelaşi numitor se transformă produsele de funcţii în sume şi se ţine cont că $A+B+C=\pi$.

7) şi 8) Se aplică formula:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}.$$

TESTUL 250

I. a) Se substituie în membrul stîng al egalităţii:

$$\sin C=\cos(A+B);\ \sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2};$$

$$\sin^2 B=\frac{1-\cos 2B}{2}.$$

b) Din $A+B+C=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \operatorname{ctg}(A+B)=\operatorname{tg} C=\frac{1}{\operatorname{ctg} C}$,

$$\frac{\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B-1}{\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B}=\frac{1}{\operatorname{ctg} C}.$$

II. Deoarece $A+B=C$ rezultă că $\cos^2(A+B)=$ $=\cos^2 C$ etc. **III.** Se înmulţeşte relaţia de condiţie cu $2\sin B$ şi apoi se transformă produsul de funcţii în sumă. **IV.** Din relaţia de condiţie rezultă: $\operatorname{tg} B=\frac{\sin 2A}{3-\cos 2A}$ şi exprimînd pe $\sin 2A$ şi $\cos 2A$ în funcţie de $\operatorname{tg} A$ se obţine

că $\text{tg } B = \frac{\text{tg } A}{1 + 2 \text{ tg}^2 A}$, după care se calculează $\text{tg}(A + B)$.

V. Se transformă în produse sumele a cîte doi termeni ținîndu-se cont că $A + B + C + D = 360°$.

TESTUL 251

I. 1) Se notează $\arccos x = \alpha \Rightarrow x = \cos \alpha \Rightarrow \sin(\arccos x) = $ $= \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm \sqrt{1 - x^2}$; $\text{arctg } x = \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \text{tg } \alpha \Rightarrow \sin(\text{arctg } x) = \sin \alpha = \frac{\text{tg } \alpha}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}} =$ $= \frac{x}{\pm \sqrt{1 + x^2}}$ etc.

2) Se notează $\text{arctg } x = \alpha \Rightarrow \sin(3 \text{ arctg } x) = \sin 3\alpha$ etc. rezultînd în final $\frac{x(3 - x^2)}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$; $\sin^2\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = \frac{1 - x}{2}$ și

$$\text{arctg}(\text{tg } x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x - \pi & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ x - 2\pi & \text{dacă } x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \end{cases}$$

În general $\text{arctg }(\text{tg}x) = x - k\pi$ dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$; $k \in Z$.

II. Deoarece $\alpha = \arcsin \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$, iar din $\beta = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \cos \beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin \beta = \frac{3}{5}$; $\text{tg } \beta = -\frac{3}{4}$.

$E_1 = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = 0$; $E_2 = -1$; $E_3 = 0$.

De altfel, se putea proceda și astfel:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left[\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]=$$

$$=\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cdot\cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)+$$

$$+\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cdot\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$$

și se ține seama de rezultatele la punctul *1*.

Observație: Ați sesizat desigur că $\alpha+\beta=\pi$ și atunci calculele de mai sus nu sînt necesare.

III. 1) Se notează: $u=\arccos\frac{1}{2}\Rightarrow\cos u=\frac{1}{2}$ și deci $u=\frac{\pi}{3}$; $v=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos v=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow v=\frac{\pi}{6}$ și atunci $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$.

2) Notînd $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=u$ și $v=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$ se verifică $\sin(u+v)=\sin\frac{\pi}{4}$. 4) Notînd cu u membrul stîng al egalității se obține: $\operatorname{tg} u=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b+\operatorname{arctg} c)=$ $=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}$, de unde se obține u. **IV.** Se ține seama de faptul că funcția arcsin : $[-1,1]$, funcția arccos: $[-1,1]$, funcția arctg : R și funcția arcctg : R, rezultînd condițiile:

$$\begin{cases}-1\leqslant\frac{3x-1}{2}\leqslant 1\\ -1\leqslant\frac{3x-1}{1+x^2}\leqslant 1\\ x-1\neq 0\\ 3-x^2\geqslant 0\\ 2x+1\neq 0\end{cases}$$

TESTUL 252

I. Se știe că ecuația $\sin x = a$ are soluția $x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi\}$ dacă $a \in [0, 1]$ și soluția $x = \{(-1)^{k+1} \cdot \arcsin a + k\pi\}$ dacă $a \in [-1, 0]$; (sau dacă $a \in [-1, 1]$ soluția ecuației $\sin x = a$ se poate scrie $x = \{(\arcsin a + 2\pi k)\} \cup \{(\pi - \arcsin a + 2\pi k\}$.

Ecuația $\cos x = a$ are soluția $x \in \{2k\pi \pm \arccos a\}$ dacă $a \in [0, 1]$ și soluția $x \in \{(2k + 1)\pi \pm \arccos a\}$ dacă $a \in [-1, 0]$; ecuația $\operatorname{tg} x = a$ are soluția $x \in \{k\pi + \operatorname{arctg} a\}$ dacă $a \in [0, \infty)$ și $x \in \{k\pi - \operatorname{arctg} a\}$ dacă $a \in (-\infty, 0]$. În toate cazurile $k \in Z$ și pentru $k = 0$ și $k = 1$ se obțin soluțiile pentru $x \in [0, 2\pi]$.

II. k) Se poate scrie: $\sin 2x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \text{ etc.}$$

Altfel: se împarte prin $\cos 2x$ ecuația și se obține $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$ etc. Altfel: se exprimă $\sin 2x$ și $\cos 2x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$.

TESTUL 253

1) Se notează $\sin x = t$. **2)** Deoarece $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, notînd $\cos x = t$, ecuația se reduce la o ecuație de gradul II în t. **3)** Se ține seama că $\cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1$. **4)** Se exprimă $\cos 4x$ în funcție de $\sin 2x$ și se notează $\sin 2x = t$. **5)** Ecuația se scrie: $2 \sin 3x \cos x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sin 3x\ (2 \cos x + 1) = 0$. **6)** și **7)** Se grupează în mod convenabil termenii și se transformă în produs. **8)** Ecuația se poate scrie sub forma:

$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x.$$

I. a) Ecuația se poate scrie: $1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{2}$ etc. b) Se folosește formula $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$. c) Prin intermediul formulei $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, se transformă pătratele cosinusurilor în funcție de arcul dublu. d) Ecuația se scrie succesiv: $\frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x - 3} = |\sin x|$ sau $\frac{y^2}{2y^2-3} = y$, unde $y = |\sin x|$. Rezultă: $y_1 = 0$; $y_2 = \frac{3}{2}$; $y_3 = -1$ dintre care numai $|\sin x| = 0$ este acceptabil.

II. a) Se ține seama că $\sin^2 u - \sin^2 v = (\sin u - \sin v)(\sin u + \sin v) = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\cdot 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$; unde $u = \frac{3\pi}{8} - x$ și $v = \frac{\pi}{8} - x$. Rezultă

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

b) Cu rezultatul de mai sus se scrie

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} =$$

$$= \operatorname{tg} 2x + \sec 2x.$$

c) Ecuația este:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + (2+\sqrt{3})\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -2-\sqrt{3}.$$

Dacă se notează $y = x + \frac{\pi}{4}$ atunci $\operatorname{tg} 2y = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2y \in$ $\in \left\{k\pi + \frac{\pi}{6}\right\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right\}$, $k \in Z$.

TESTUL 255

1) Se folosește formula $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$. 2) Deoarece $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$, ecuația se scrie:

$$2\sin 2x\,(2\sin x\sin 3x - \cos 2x) = 0.$$

3) $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \sin 2x$. 4) $4\sin 2x = \sqrt{3} + \operatorname{tg} x$ și în continuare se ține seama că $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. 5) Ecuația este echivalentă cu ecuația $4\cdot\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{3} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. 6) Stabilind domeniul de definiție se obține $x = 0$ și cum $x = 0$ nu verifică ecuația, rezultă că ecuația nu are soluție. 7) Domeniul de definiție va fi $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ecuația se poate scrie $1 - 2x^2 = 2x \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0$; rezultă soluția $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

8) Se scrie: $\sin^3 x\,(3\sin x - 4\sin^3 x) + \cos^3 x\,(4\cos^3 x - 3\cos x) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow -3(\cos^4 x - \sin^4 x) + 4(\cos^6 x - \sin^6 x) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow -3\cos 2x + 4\cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right) = \frac{1}{8} \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos^3 2x = \frac{1}{8}$; $\cos 2x = \frac{1}{2}$ etc.

TESTUL 256

I. 1) 2) 3). Cu notațiile făcute teorema sinusurilor se scrie: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. Folosind propietățile șirului de rapoarte egale rezultă că $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C}$. Deoarece, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$, se poate arăta fără dificultate că $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

4) Se aplică teorema sinusurilor în triunghiul ABA': $\frac{d(A, A')}{\sin B} = \frac{c}{\sin \widehat{AA'B}}$, dar $\widehat{AA'B} \equiv 2 \text{ dr} - \left(B + \frac{A}{2}\right) \equiv 1 \text{ dr} - \frac{B - C}{2}$. Analog se obțin și lungimile celorlalte bisectoare, sau se scriu formulele prin permutări circulare.

III. Se aplică teorema sinusurilor în triunghiurile ABD și BDC, obținîndu-se $d(A, B) = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; $d(A, D) = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha)}$; $d(B, C) = \frac{a \sin(\alpha + 2\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$.

TESTUL 257

I. Folosind teorema sinusurilor, se obține:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R \sin C} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A - B}{2}}{\sin \frac{C}{2}};$$

dar

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\Rightarrow\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}\Rightarrow\hat{A}\equiv\hat{B}+\hat{C}\Rightarrow\hat{A}\equiv 1\text{dr.}$$

II. 1) Se scrie teorema sinusurilor, din care se obține că

$$\frac{a}{b-c}=\frac{\sin A}{\sin B-\sin C}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

2) Folosind teorema cosinusurilor se obține:

$$ab\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \text{ și } ac\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2},$$

de unde rezultă că: $ab\cos C-ac\cos B=b^2-c^2$.

3) Se folosesc formulele: $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$,

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \text{ și } \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Făcînd produsul rezultă: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$ fiindcă

$abc=4RS$, iar $(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=rS$.

III. În relația dată, se ține seama de formulele:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ și } \operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}},$$

obținîndu-se: $c^2=4(p-a)(p-b)=(-a+b+c)(a-b+c)=c^2-(a-b)^2$. Relația $c^2=c^2-(a-b)^2$ este adevărată atunci cînd $a-b=0$, adică $a=b$.

TESTUL 258

I. 1) Se ține seama în relația dată, de faptul că: $a = b\cos C + c\cos B$ și $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$. Se obține, în final, că $\sin B \cos C = \sin C \cos B \Rightarrow \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C$. 2) Deoarece $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$, relația se scrie sub forma $\sin B \cos C = \sin C \cos B$. 3) În relația dată se înlocuiesc $\frac{a}{b}$ prin $\frac{\sin A}{\sin B}$ și se obține: $\sin A = 2 \sin B \sin \frac{A}{2}$, adică $\sin B = \frac{\sin A}{2 \sin \frac{A}{2}} = \cos \frac{A}{2}$, adică

$\hat{B} \equiv 1 \text{ dr} - \frac{\hat{A}}{2}$ etc. 4) Se scrie relația sub forma: $p - b =$

$= \frac{p \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{ctg} C}$, dar $p - b = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$. 5) Se scrie relația sub forma: $a\left[\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}\right] = b\left[\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} - \operatorname{tg} B\right]$;

deci
$$\frac{a\left[\sin A \cos \frac{A+B}{2} - \cos A \sin \frac{A+B}{2}\right]}{\cos A \cos \frac{A+B}{2}} =$$

$$= \frac{b\left[\sin \frac{A+B}{2} \cos B - \cos \frac{A+B}{2} \sin B\right]}{\cos B \cos \frac{A+B}{2}}$$ sau

$$\frac{a \sin \frac{A-B}{2}}{\cos A} = \frac{b \sin \frac{A-B}{2}}{\cos B} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\cos A}{\cos B},$$

dar
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{B}.$$

II. 1) Deoarece $\hat{A} + \hat{C} \equiv 2\,\text{dr} - \hat{B}$ rezultă că:

$$\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Ținînd seama de relația din enunț rezultă că

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}; \quad \text{adică: } \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}.$$

Implicația inversă rezultă imediat. 2) În relația din enunț se folosesc formulele:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \Rightarrow a + c = 3b.$$

3) Deoarece

$$\cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = 2\left(1 - 2\sin^2\frac{B}{2}\right)^2 - 1,$$

rezultă $\cos 2B$ și măs $\hat{B} = 36°$. 4) În relația dată se folosesc formulele:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2}\right] \text{ și } \sin\frac{B}{2} =$$

$$= \cos\frac{A+C}{2} \text{ și rezultă } \cos\frac{A-C}{2} = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - C = 2\arccos\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}$$

și cum $\hat{A} + \hat{C} \equiv 2\,\text{dr} - \hat{B}$ pot calcula măs $\hat{A}$ și măs $\hat{B}$.

TESTUL 259

I. 1) Din relația

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ rezultă } \cos A > \frac{b^2 + c^2}{4bc} > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{măs } \hat{A} < \frac{2}{3} \text{ dr.}$$

2) Relația $\cos 2B + \cos 2C = 2 \cos 2A$ se mai scrie sub forma: $2 \cos (B + C) \cos (B - C) = 2 \cos 2A$.

II. Ținînd seama de teorema sinusurilor relația se scrie sub forma:

$$E = \frac{2R \sin A}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{2R \sin B}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{2R \sin C}{\sin^2 \frac{C}{2}} =$$

$$= 4R\left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}\right) = 4R \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

III. Egalitatea $\sin A + \sin C = 2 \sin B$ se poate scrie astfel:

$$2 \sin \frac{A + C}{2} \cos \frac{A - C}{2} = 4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \quad \text{sau}$$

$$2 \sin \frac{A + C}{2} \cos \frac{A - C}{2} = 4 \cos \frac{A + C}{2} \sin \frac{A + C}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

IV. Deoarece $\hat{B} + \hat{C} \equiv 2\hat{A}$, rezultă că $\hat{A} \equiv \frac{2}{3}$ dr și $\hat{B} + \hat{C} \equiv \frac{4}{3}$ dr. Din teorema sinusurilor rezultă că:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2a}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}} \text{ unde } \hat{A} \equiv \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \equiv \frac{2}{3} \text{ dr.}$$

Se obține

$$1 = \cos\frac{B-C}{2} \text{ adică } \text{măs } \hat{A} = \text{măs } \hat{B} = \text{măs } \hat{C} = 60°.$$

TESTUL 260

1) Se scrie că

$$\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}, \text{ dar}$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2} \Rightarrow \text{măs } \hat{A} = 90°.$$

2) Triunghiul este dreptunghic. În relația dată se ține seama că:

$$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$$

și rezultă că triunghiul este isoscel sau dreptunghic. 4) Triunghiul este isoscel. 5), 6), 7), 8). Triunghiurile sînt dreptunghice.

TESTUL 261

I. Se folosește teorema sinusurilor. **II.** Unghiurile sînt de 30° și respectiv 150°.

TESTUL 262

a) Dacă $e^{it} = \cos t + i\sin t$, atunci $e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t)$, adică $e^{-it} = \cos t - i\sin t$. Făcînd suma $e^{it} + e^{-it}$ rezultă formula $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, iar din diferența $e^{it} - e^{-it}$ rezultă că $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.

b) Formulele rezultă prin calcule algebrice simple ținînd seama de formulele de la punctul a).

De exemplu, pentru 2):

$$\sin 2t = \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}, \quad \text{iar } 2 \sin t \cdot \cos t = 2\,\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\,\cdot$$

$$\cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{(e^{it} + e^{-it})\,(e^{it} - e^{-it})}{2i} = \frac{(e^{it})^2 - (e^{-it})^2}{2i} =$$

$$= \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \sin 2t.$$

4) Deoarece

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ rezultă } \cos 2t = \frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2}.$$

Pe de altă parte avem:

$$2 \cos^2 t - 1 = 2\left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right]^2 - 1 =$$

$$= 2\,\frac{(e^{it})^2 + 2 \cdot e^{it} \cdot e^{-it} + (e^{-it})^2}{4} - 1 = \frac{e^{i2t} + e^{-i2t} + 2}{2} - 1 =$$

$$= \frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2} + 1 - 1 = \cos 2t.$$

8) Se știe că $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, de unde rezultă că $\operatorname{tg} t =$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}}.$$

9) Ţinînd seama de punctul 8) rezultă că

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}} \text{ şi atunci } \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{2}{i}\cdot\frac{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}}\cdot\frac{1}{1-\left[\frac{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}}\right]^2}=$$

$$=\frac{2}{i}\cdot\frac{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}}\cdot\frac{\left[e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}\right]^2}{\left[e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}\right]^2-\left[e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right]^2}$$

$$=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2i}=\sin t.$$

TESTUL 263

I. 2) $\exp(t+2\pi)=e^{t+2\pi}=\cos(t+2\pi)+i\sin(t+2\pi)=\cos t+i\sin t=e^{it}=\exp t$. **II.** Se scrie formula lui *Moivre* pentru $n=4$ şi se obţine: $(\cos t+i\sin t)^4=\cos 4t+i\sin 4t$. Pe de altă parte, folosind binomul lui *Newton* avem: $(\cos t+i\sin t)^4=\cos^4 t+\sin^4 t-6\sin^2 t\cos^2 t+4i(\cos^3 t\sin t-\cos t\sin^3 t)$. Din cele două relaţii se obţine egalitatea: $\cos 4t+i\sin 4t=\cos^4 t+\sin^4 t-6\sin^2 t\cdot\cos^2 t+4i\sin t\cos t[\cos^2 t-\sin^2 t]\Leftrightarrow\cos 4t=\cos^4 t+\sin^4 t-6\sin^2 t\cos^2 t$ şi $\sin 4t=4\sin t\operatorname{cost} t(\cos^2 t-\sin^2 t)$ etc. Celelalte identităţi se deduc scriind formula lui *Moivre* pentru $n=5$ şi $n=6$.

TESTUL 264

I. $E=e^{i4t}\cdot e^{-it}=e^{i3t}=\cos 3t+i\sin 3t$ şi $E\in R$ dacă $\sin 3t=0$, adică $3t=0$ şi $3t=\pi$, deci $t\in\left\{0,\frac{\pi}{3}\right\}$.

II. Expresia $|z|\, e^{i \arg z} = |z| [\cos \arg z + i \sin \arg z]$ poartă numele de forma trigonometrică a numărului complex z; $z \neq 0$, fiindcă numărul complex $z = 0$, are argumentul nedefinit.

În plus, are loc egalitatea $z = r(\cos t + i \sin t)$ dacă se notează $|z| = r$ și $t \in \arg z$. Dacă $z = x + iy = re^{it} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\cos t = \dfrac{x}{r}$; $\sin t = \dfrac{y}{r}$ unde

$t = \arg z + 2k\pi$.

III. 1) $|z| = \sqrt{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2} =$

$$= \sqrt{2}; \quad \cos t = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \alpha}{\sqrt{2}} =$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{și} \quad \sin t = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Deci $\arg z = \alpha - \dfrac{\pi}{4}$.

Se mai poate proceda astfel: $z = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) +$

$$+ \sin \alpha + i\left(\sin \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ 2i \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

și comparînd cu $z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z)$ se obține același rezultat.

TESTUL 265

I. Numărul complex z se mai poate scrie sub forma:

$$z = \frac{(1 - \alpha i)^2}{1 + \alpha^2} = \frac{1 - \alpha^2 - 2i\alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta - 2i \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} - i \frac{2 \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} = \cos 2\theta - i \sin 2\theta.$$

(S-a făcut notația $\alpha = \operatorname{tg}\theta$).

II. Expresia se mai poate scrie:

$$E = (\cos t + i \sin t) \cdot [(\cos t + i \sin t) \cdot (\cos t_1 + i \sin t_1)] \cdot$$
$$\cdot [(\cos t + i \sin t)(\cos 2t_1 + i \sin 2t_1)] =$$
$$= (\cos t + i \sin t)^3 (\cos t_1 + i \sin t_1) \cdot (\cos t_1 + i \sin t_1)^2 =$$
$$= (\sin t + i \sin t)^3 \cdot (\cos t_1 + 1 \sin t_1)^3 = e^{3i[t+t_1]}.$$

III. 1) Se procedează astfel:

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2, \arg z = \frac{\pi}{6}$$

deci $z^{60} = 2^{60} \cdot e^{i60 \cdot \frac{\pi}{6}} = 2^{60} e^{i \cdot 10\pi} = 2^{60}$, fiindcă

$$e^{i \cdot 10\pi} = \cos 10\pi + i \sin 10\pi = 1.$$

Se folosește același procedeu și pentru exercițiile care urmează.

TESTUL 266

Fie numărul complex $z = re^{it}$ și n un număr natural. În acest caz există n rădăcini de ordinul n ale lui z și aceste rădăcini sînt date de formula $z_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{t+2k\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$.

1) Pentru $z = \sqrt{3} - i$, $r = 2$, $\arg z = t = \frac{11\pi}{6}$.

Rădăcinile de ordinul doi sînt $z_1 = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{11\pi}{12}}$; $z_2 = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi}{2}}$.
Rădăcinile de ordinul trei sînt:

$$z_1 = 2^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i\frac{11}{18}},\quad z_2 = 2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{11\frac{\pi}{6}+2\pi}{3}},\quad z_3 = 2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\frac{11\pi}{6}+4\pi}{3}};$$

iar rădăcinile de ordinul patru sînt:

$$z_1 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{11\pi}{24}}, \quad z_2 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi}{4}}, \quad z_3 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{\frac{11\pi}{6}+4\pi}{4}} \text{ și}$$

$$z_4 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{\frac{11\pi}{6}+6\pi}{4}}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Se procedează analog pentru celelalte numere complexe propuse.

TESTUL 267

1) Rezolvarea ecuației constă în calcularea rădăcinilor de ordinul 3, ale numărului complex $z = 1 - i$. 2) Rezolvarea ecuației date este echivalentă cu rezolvarea ecuațiilor $z^4 + 1 = 0$ și $z^4 - i = 0$. 3) Ecuația se mai scrie $\frac{1 + iz}{1 - iz} =$

$$= e^{i\frac{t+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 \Rightarrow iz = \frac{e^{i\frac{t+2k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{t+2k\pi}{n}} + 1} \text{ etc.}$$

4) Ecuația se scrie sub forma $\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^n = 1 \Rightarrow ix =$

$$= \frac{\sqrt[n]{1} - 1}{\sqrt[n]{1} + 1} \Rightarrow x_k = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n}.$$

TESTUL 268

I. 2) În identitatea de la punctul 1) se consideră $\alpha = 9°$ și $\beta = 81°$ și atunci rezultă $\operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 81° = \frac{2}{\cos 72°}$, iar pentru $\alpha = 27°$ și $\beta = 63°$ se obține $\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 63° =$ $= \frac{2}{\cos 36°}$.

În final se scrie:

$$E = \frac{2}{\cos 72^\circ} - \frac{2}{\cos 36^\circ} = \frac{2(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)}{\cos 72^\circ \cos 36^\circ} =$$

$$= \frac{4 \sin 54^\circ \sin 18^\circ}{\cos 72^\circ \cos 36^\circ} = 4.$$

II. *Metoda I.* Se poate scrie: $\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ)$; $\cos 105^\circ = \cos (45^\circ + 60^\circ)$; $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} (45^\circ + 30^\circ)$. *Metoda a II-a.* $E = \sin 15^\circ \cdot (-\cos 75^\circ) \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = -\sin 15^\circ \sin 75^\circ =$

$$= -\sin 15^\circ \cos(90^\circ - 75^\circ) = -\sin 15^\circ \cos 15^\circ = -\frac{1}{2} \sin 30^\circ =$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

III. 1). *Metoda I.*

$$2^0 \operatorname{tg} x - 2^0 \operatorname{ctg} x = -2^1 \operatorname{ctg} 2x$$

$$2^1 \operatorname{tg} 2^1 x - 2^1 \operatorname{ctg} 2^1 x = -2^2 \operatorname{ctg} 2^2 x$$

$$2^2 \operatorname{tg} 2^2 x - 2^2 \operatorname{ctg} 2^2 x = -3^3 \operatorname{ctg} 2^3 x$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2^n \operatorname{tg} 2^n x - 2^n \operatorname{ctg} 2^n x = -2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x$$

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 2^2 \operatorname{tg} 2^2 x + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x - \operatorname{ctg} x =$$

$$= -2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x.$$

Metoda a II-a. Deoarece $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x$; membrul stîng al identității se scrie: $(-2 \operatorname{ctg} 2x + 2 \operatorname{tg} 2x) + 4 \operatorname{tg} 4x + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x = -4 \operatorname{ctg} 2^2 x + 4 \operatorname{tg} 2^2 x + 2^3 \operatorname{tg} 2^3 x + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x = -2^3 \operatorname{ctg} 2^3 x + 8 \operatorname{tg} 2^3 x + 2^4 \operatorname{tg} 2^4 x + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \dots = -2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x.$

2) Deoarece $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sin 2x}$ putem scrie:

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 2^2x = \frac{1}{\sin 2^2x}$$

$$\operatorname{ctg} 2^2x - \operatorname{ctg} 2^3x = \frac{1}{\sin 2^3x}$$

....

$$\operatorname{ctg} 2^{n-1}x - \operatorname{ctg} 2^nx = \frac{1}{\sin 2^nx}$$

TESTUL 269

I. Se calculează $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = 2\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\cdot\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{5}$, iar $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5}$ şi astfel se poate calcula $\sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = 2\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{24}{25}$. Pe de altă parte avem: $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) = \frac{7}{\sqrt{50}}$; $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) - 1 = \frac{24}{25}$. S-au folosit formulele: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

II. Din relaţia $z + \frac{1}{z} = \cos t$ rezultă $z_{1,2} = \cos t \pm i \sin t$, adică $z_1 = e^{it}$ şi $z_2 = e^{-it}$; $\frac{1}{z_1} = e^{-it}$ şi $\frac{1}{z_2} = e^{it}$.

Deci: $z^n + \frac{1}{z^n} = e^{int} + \frac{1}{e^{int}} = e^{int} + e^{-int} = 2\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} =$
$= 2\cos nt.$

III. 1) Ecuația se scrie și sub forma echivalentă:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

2) $x \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}, k \in Z.$

IV. Pentru rezolvarea acestor ecuații recomandăm cititorului să consulte indicația de la exercițiul 2. d, pag. 188.

TESTUL 270

I. 1) $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$. 2) $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow G(x) < 0.$

II. Folosind formula $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$, ecuația se poate scrie sub forma: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

III. 1) $t = \frac{7\pi}{4}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{2}{\sin t}$ etc.

TESTUL 271

I. 1) Deoarece $2\cos\frac{x}{4} \leqslant 2$, iar $3^x + 3^{-x} = 2 \Rightarrow 2\cos\frac{x}{4} =$
$= 3^x + 3^{-x} \Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{4} = 2$ și $3^x + 3^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0.$

2) Dacă $a > 0$, $a + \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 1.$

3) O sumă de termeni pozitivi este nulă atunci și numai atunci cînd fiecare termen este nul.

II. Se pun condițiile: $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \\ \frac{1}{2} - \cos x > 0 \\ \frac{1}{2} - \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$

Se notează $\log_{\cos x}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = t$ și atunci ecuația se scrie sub forma $t^2 - 3t + 2 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = 1$ și $t_2 = 2$. Rezultă $x \in \left\{2k\pi \pm \arccos \frac{1}{4}\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right\}$; $k \in Z$.

III. Funcția este definită pe R, și are perioada $T = 2\pi$. Se face substituția $\sin x = t$ și se obține tabelul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
t	0		1		0		-1		0
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

TESTUL 272

I. În identitatea $\text{arctg } \alpha - \text{arctg } \beta = \text{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$ se consideră $\alpha = \frac{1}{k}$ și $\beta = \frac{1}{k+1}$ obținîndu-se: $\text{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1} = \text{arctg} \frac{1}{k} - \text{arctg} \frac{1}{k+1}$. În final se obține

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\text{arctg} \frac{1}{k} - \text{arctg} \frac{1}{k+1}\right] = \text{arctg } 1 - \text{arctg} \frac{1}{n+1}.$$

11. Se știe că funcția sign: $R \to \{-1, 0, 1\}$ (vezi testul 14) este definită prin:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in (0, +\infty), \\ 0 \text{ pentru } x = 0, \\ -1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$\text{Deci sign}(\sin x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in (2k\pi, \ (2k+1)\pi); \\ 0 \text{ pentru } x = k\pi, \\ -1 \text{ pentru } x \in ((2k+1)\pi, \ 2(k+1)\pi). \end{cases}$$

Dacă $x \in [0, \pi]$ se obține:

$$\cos x \text{ sign}(\sin x) = \begin{cases} \cos x \text{ pentru } x \in (0, \pi), \\ 0 \quad \text{ pentru } x \in \{0, \pi, 2\pi\}, \\ -\cos x \text{ pentru } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

$$\sin x \text{ sign}(\cos x) = \begin{cases} \sin x \text{ pentru } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right); \\ 0 \quad \text{ pentru } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ și } x = \dfrac{3\pi}{2}, \\ -\sin x \text{ pentru } x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right), \\ \sin x \text{ pentru } x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Deci pentru $x \in [0, 2\pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ pentru } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right), \\ -\sin x \text{ pentru } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right), \\ \cos x \text{ pentru } x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right), \\ -\cos x \text{ pentru } x \in \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

TESTUL 273

I. 1) Deoarece, $f(x) > 0\ (\forall) x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ rezultă

$$\begin{cases} 1 - 2\cos\alpha > 0, \\ \sin^2\alpha - 8\cos\alpha(1 - 2\cos\alpha) < 0. \end{cases}$$

Notînd $\cos\alpha = t$, $\Rightarrow t \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$ etc.

2) Trebuie arătat că expresia $E(x) = 16\left[\left(\frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1}\right)^2 - \right.$ $\left. - \frac{16\cos\alpha}{1 - 2\cos\alpha}\right] - 3\,\frac{64\cos^2\alpha}{(1 - 2\cos\alpha)^2}$ nu depinde de α.

3) Se știe că $x_e = \frac{-\sin\alpha}{1 - 2\cos\alpha}$ și $f(x_e)$ este maxim sau minim după cum: $1 - 2\cos\alpha < 0$ sau $1 - 2\cos\alpha > 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. ARAMĂ, L., MORUZAN, T., — *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1967.

2. BANEA, H., — *Probleme de matematică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

3. BAKHVALON, N., *Méthodes numériques*. Editions de Moscou, 1976.

4. CĂLUGĂRIŢA, Gh., MANGU, V., *Probleme de matematică pentru treapta I şi a II-a de liceu*, Edit. Albatros, Bucureşti, 1977.

5. COŞNIŢĂ, C., TURTOIU, F., *Culegere de probleme de algebră*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1972.

6. CRAIU, M., ROŞCULEŢ, M., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

8. DEMIDOVITCH, B., *Recueil d'exercices et des problèmes d'analyse mathématique*, Edit. Mir, Moscova, 1972.

9. DRAGOMIR, P., DRAGOMIR, A., *Structuri algebrice*, Edit. Facla, Timişoara, 1975.

11. FILIMON, I., şi colaboratori., *Curs de matematici generale* Lito. 1975. Institutul de Construcţii Bucureşti.

12. GEORGESCU-BUZĂU, E., MAFTEI, N., *Exerciţii de teoria mulţimilor*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.

13. GEORGESCU-BUZĂU, E., MAFTEI, N., DRĂGHICESCU, I., *Probleme actuale de matematică în liceu*, Edit. Albatros, Bucureşti, 1975.

14. GHEORGHIU, Th., *Algebră lineară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1977.

15. ION I., RADU, N., *Algebra*, Ed. a II-a, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.

16. IONESCU, B., BRIȘCA, V., TUDOR, G., *Calcul numeric*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1974.

17. IONESCU, B., RADU, D., ILIESCU, I., *Probleme de matematică pentru admiterea în învățămîntul superior*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.

18. IONESCU-ȚIU, C., PÎRȘAN, L., *Algebră și analiza matematică pentru admitere în învățămîntul superior*, Edit. Albatros, București, 1974.

19. IONESCU-ȚIU, C., PÎRȘAN, L., MIHĂILEANU, N., ROGAI, E., *Probleme de matematică*, Ed. a II-a, Edit. tehnică București, 1973.

20. KRECHMAR, V. A., *A problem book in algebra*, Mir publishers, Moscova, 1974.

21. LEONĂCHESCU, N., și colaboratori, *Culegere de probleme de termotehnică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1977.

22. MARON, I. A., *Problems in Calculus of one variable*, Mir publishers, Moscova, 1975.

23. MIHĂILĂ, N., *Elemente de programare liniară*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1964.

24. NIȚĂ, C., SPIRCU, T., *Probleme de structuri algebrice*, Edit. tehnică, București, 1974.

25. PANAITOPOL, L., OTTESCU, C., *Probleme date la olimpiadele de matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.

12 PETRICĂ, I., RUSU, I., *Probleme de matematică pentru treapta I de liceu*, Edit. Albatros, București, 1976.

27. POPESCU, I., VRĂNCEANU, G.G., *Culegere de probleme de geometrie analitică și diferențială*, Edit. tehnică, București, 1970.

28. ROȘCULEȚ, N. M., POPESCU, I. O., *Probleme de analiză matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1977.

29. RUSU, E., *Artimetica și teoria numerelor*, Edit. tehnică, București, 1964.

30. SIREŢCHI, G., *Exerciţii de analiză matematică*, Litografia Universităţii, Bucureşti, 1976.

31. STAMATE, I., CRIŞAN, I., *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică pentru licee*, Edit. did. şi pedagogică, Bucureşti, 1969.

32. STAMATE, I., STOIAN, I., *Culegere de probleme de algebră pentru licee*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti.

33. TRANDAFIR, R., LEONTE, A., *Culegere de probleme şi exerciţii de matematică*, Edit. Junimea, Iaşi, 1975.

34. ZELDOVICH, Ya. B., NYSKIS, A. D., *Elements of Applied Mathematics*, Mir publishers, Moscova, 1976.

35. * * * *Probleme de matematică pentru concurs* (traducere din limba maghiară). Edit. didactică şi pedagogică Bucureşti, 1972.

36. * * * *Culegere de probleme de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Lito. Institutul de Construcţii Bucureşti, 1977.

37. * * * Colecţia „Gazetei matematice" seria B (G.M.B.), 1965—1977.

CUPRINS

— Clasa a XI-a
(Testele 106—113)

— Clasa a XII-a
(Testele 114—148)

II. TESTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

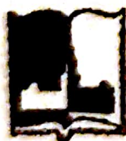
— Clasa a XI-a
(Testele 149—193)

– Clasa a XII-a
(Testele 194–233)

III. TESTE DE TRIGONOMETRIE PLANA

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 23.11.1981. apărut 1981.
Comanda nr. 1743. Coli de tipar 31.



Comanda nr. 280
Combinatul poligrafic „Casa Scînteii",
Piața Scînteii nr. 1, București,
Republica Socialistă România



Prezentînd grupaje de exerciții și probleme de matematică organizate gradat, în funcție de materia predată în școală, lucrarea conține o sinteză a cunoștințelor pe care trebuie să le posede un elev de liceu.

«Teste de matematică pentru treapta I și a II-a de liceu» acoperă, în general, cunoștințele cuprinse în programa actuală de algebră, analiză și trigonometrie, iar problemele și exercițiile propuse sînt însoțite de indicații și răspunsuri.

Lei 15,50